情報論理 2010 年夏学期 中間試験

1. $(C^A) \times (C^B)$ の要素に C^{A+B} の要素にを対応させる全単射を定義せよ。

2. $((P \supset Q) \supset Q) \supset Q$ を偽にする解釈 I を与えよ。すなわち、$[\![((P \supset Q) \supset Q) \supset Q]\!]_I = \bot$ となるような $I(P) \in \{\bot, \top\}$ と $I(Q) \in \{\bot, \top\}$ を与えよ。

3. 下図の解釈のもとで、次の各論理式の真偽を与えよ。

(a) $\exists x.\ R(a, x) \wedge R(x, b)$

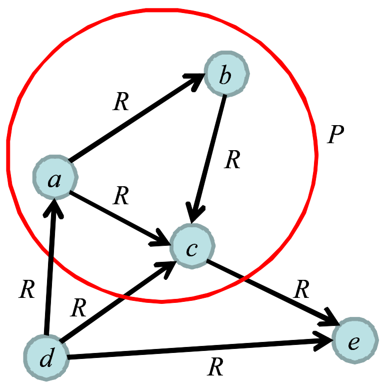
(b) $\forall x.\forall y.\ P(x) \wedge R(x, y) \supset P(y)$

(c) $\forall x.\exists y.\ P(x) \supset R(x, y)$

(d) $\exists x.\exists y.\ R(x, y) \wedge R(y, x)$

(e) $\exists x.\exists y.\exists z.\ P(x) \wedge R(x, y) \wedge P(y) \wedge R(y, z) \wedge P(z)$

(f) $\exists x.\exists y.\exists z.\ \neg P(x) \wedge R(x, y) \wedge \neg P(y) \wedge R(y, z) \wedge \neg P(z)$



4. 論理式 $\forall x.\ Q(x, z) \supset (\exists y.R(x, y, z))$ の自由変数 z に項 $f(y)$ を代入せよ。

5. 次の論理式を偽にする解釈 I を与えよ。

$$(\forall x.\ P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$$

すなわち、I の領域 U を定義し、$I(P)(u) = \top$ となる条件と $I(Q)(u) = \top$ となる条件を与えよ。

6. 次の論理式に関して以下の問いに答えよ。

$$Q(c, d) \wedge (\forall x.\forall y.\ Q(x, y) \supset \neg Q(y, x)) \wedge (\forall x.\forall y.\ Q(x, y) \supset (\exists z.\ Q(x, z) \wedge Q(z, y)))$$

(a) この論理式と論理同値な冠頭形を求めよ。

(b) 求めた冠頭形を Skolem 化せよ。

(c) Skolem 化された論理式を充足する解釈を一つ与えよ。(Herbrand 解釈でもよい。)

7. Γ が命題論理式の極大無矛盾集合であるとき、$A \vee B \in \Gamma$ ならば、$A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$ であることを示せ。

8. 次の論理式を $A[x, y]$ とおく。

$$P(c) \wedge (P(x) \wedge P(y) \supset P(g(x, y))) \wedge \neg P(g(c, g(c, c)))$$

以下の問いに答えよ。

(a) 以下の形の論理式が充足不能になるように、$\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit$ に入る項を求めよ。

$$A[\spadesuit, \clubsuit] \wedge A[\diamondsuit, \heartsuit]$$

(b) $A[\spadesuit, \clubsuit]$ が充足可能であることを示せ。

(c) $A[\diamondsuit, \heartsuit]$ が充足可能であることを示せ。

(d) Hilbert 流の演繹体系のもとで、以下の論理式が証明可能であることを説明せよ。

$$\neg(\forall x.\forall y.A[x, y])$$

(証明の大まかな道筋だけ述べればよい。)