離散数学試験問題

2008-09-16
担当：今井浩

問題 1.

(1)4 点からなる完全グラフ K_4 は平面グラフであることを示し、その双対平面グラフを与えよ。

(2) 元の K_4 の circuit に対応する双対平面グラフの枝部分集合はどのような性質を有するか?

(3) それぞれのグラフの点枝の接続行列を実数体上で考えたとき、その 2 つの行列はどのような性質を有するか?

問題 2.

(1) 最大流最小カット定理を説明せよ。

(2) 最大流最小カット定理を用いて、2 部グラフの最大マッチング最小点カバー定理を証明せよ。

問題 3.

$\max\{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 + x_2 \leq 1,\ x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 + x_3 \leq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\ \}$ なる線形計画問題について、以下の問に答えよ。

(1) 標準系に変換せよ。

(2) 元の問題での原点に対応する解からスタートして、単体法により最適解が得られる過程を示せ。ピボットの選び方に任意性がある場合は、それぞれを選んだ場合の過程を示せ。

(3) 双対問題を記述し、その最適解を与えよ。

(4) 主問題・双対問題それぞれの最適解の対について、相補性条件が成立していることを記述せよ。

(5) 元の問題で、さらに $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ という新たな制約をいれた問題ではどうなるか?

問題 4.

数直線上の n 個の区間の交グラフの区間グラフを考える。区間の端点の座標はすべて異なるとする。

(1) 区間グラフの長さ 4 以上の閉路は、必ず弦 (chord; その閉路上の隣接しない 2 点を結ぶ枝) をもつことを示せ。

(2) 区間グラフは、点をうまく選んで $v_1, ..., v_n$ と並べると、$\{v_i\} \cup \{v_j \mid j > i, v_i, v_j$ が隣接 $\}$ がクリークであるようにできることを示せ。

(3) 上の (2) を用いて、区間グラフの最大安定集合を求めるアルゴリズムを示せ。

(4) 長さ 4 以上の閉路が必ず弦をもつグラフを chordal graph いう。上の (2) の点列の性質は chordal graph で成り立つことを示せ。