第7回 (12/6)

4-7. 相対論的運動方程式

$$\vec F = \dot{\vec p} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec v)$$

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{dt} \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec p\right)$$

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}, \vec p\right)$$

$$= \left(\frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}E, \gamma\frac{d\vec p}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\vec F\right)$$

(エネルギー保存の式 $\frac{dE}{dt} = \vec F\cdot\vec v$)

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec F\cdot\vec v, \gamma\vec F\right)$$

$$\vec F = \frac{d}{dt}(\gamma m_0\vec v)$$

$$= m_0\frac{d\gamma}{dt}\vec v + \gamma m_0\vec a, \quad \vec a = \frac{d\vec v}{dt}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \to \frac{dE}{dt} = m_0 c^2\frac{d\gamma}{dt}$$

$$m_0\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\vec F\cdot\vec v$$

$$\vec F = \frac{\vec v}{c^2}(\vec F\cdot\vec v) + \gamma m_0\vec a$$

$$\vec a = \frac{\vec F}{\gamma m_0} - \underbrace{\frac{\vec v}{\gamma m_0 c^2}(\vec F\cdot\vec v)}$$

↳ $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ のオーダー

4-8. 一般ローレンツ変換

$$\vec r = (x, y, z)$$

$$\vec r' = (x', y', z')$$

S'の原点 $\vec r = \vec V t$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(-\beta ct + x) \end{cases}$$

$\vec r$ の $\vec V$ 方向に平行な成分 $\vec r_\parallel$

垂直な成分 $\vec r_\perp$

$$\vec r_\parallel = \frac{\vec\beta_V\cdot\vec r}{\beta_V^2}\cdot\vec\beta_V \quad \left(\vec\beta_V = \frac{\vec V}{c}\right)$$

$$\vec r_\perp = \vec r - \vec r_\parallel$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \vec\beta_V\cdot\vec r_\parallel) \\ \vec r'_\parallel = \gamma(-\vec\beta_V ct + \vec r_\parallel) \\ \vec r'_\perp = \vec r_\perp \end{cases}$$

$$\vec r' = \vec r'_\parallel + \vec r'_\perp = \vec r_\perp + \gamma(\vec r_\parallel - \vec\beta_V ct)$$

(一般ローレンツ変換)

$$\begin{cases} dt' = \gamma\left(dt - \frac{\vec\beta_V\cdot d\vec r_\parallel}{c}\right) \\ d\vec r' = d\vec r_\perp + \gamma(d\vec r_\parallel - \vec\beta_V c\,dt) \end{cases}$$

速度の変換則

$$\vec v' = \frac{d\vec r'}{dt'} = \frac{\frac{\vec v_\perp}{\gamma} + \vec v_\parallel - \vec\beta_V c}{1 - \vec\beta_V\cdot\frac{\vec v}{c}}$$

$$\vec\beta' = \frac{\vec v'}{c} = \frac{\vec\beta_\perp/\gamma_V + \vec\beta_\parallel - \vec\beta_V}{1 - \vec\beta_V\cdot\vec\beta}$$

$$\frac{\gamma\gamma_V}{\gamma'} = \frac{1}{1 - \vec\beta_V\cdot\frac{\vec v}{c}}$$

4-9. 力の変換則

$$\frac{dp^\mu}{dt} = K^\mu, \quad K^\mu = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma\vec{F}\right)$$

ミンコフスキーの4元力

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$\gamma'\vec{F}' = \gamma\vec{F}_\perp + \gamma\left(\gamma\vec{F}_\parallel - \vec{\beta}_v\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\vec{F}' = \frac{\gamma\gamma_v}{\gamma'}\left(\frac{\vec{F}_\perp}{\gamma_v} + \vec{F}_\parallel - \frac{\vec{\beta}_v}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}\right)$$

$$= \frac{\frac{\vec{F}_\perp}{\gamma_v} + \vec{F}_\parallel - \frac{\vec{\beta}_v(\vec{F}\cdot\vec{v})}{c}}{1 - \vec{\beta}_v\cdot\frac{\vec{v}}{c}}$$

▷ S系の中で静止 ($\vec{v}=0$) 粒子に働く力 $\vec{F}_0$

$$\vec{F}'_{0\parallel} = \vec{F}_{0\parallel}, \quad \vec{F}'_{0\perp} = \frac{\vec{F}_{0\perp}}{\gamma_v}$$

S'から見ると、進行方向には不変
直交方向には弱くみえる。($\times\frac{1}{\gamma_v}$)

5章 相対論的電磁気学

特殊相対論
クーロンの法則 ⇒ 電磁気学の体系

◦クーロンの法則

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ で電場を定義

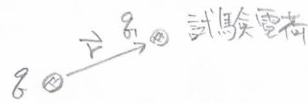
$\vec{F}$を一般ローレンツ変換
⇒ 磁場を定義

電場 ⟷ 磁場の変換則を求める。

電荷の運動 ⇒ ビオ・サバールの法則を求める。

最終的にMaxwell eq.がローレンツ不変であることを示す。

5-1. クーロンの法則



静止源電荷 $\vec{F} = k q_1 q \frac{\vec{r}}{r^3}$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ 逆2乗則

源が静止している限り成立
→実験的に検出

電場 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} = kq\frac{\vec{r}}{r^3}$