



離散数学試験問題

2011-09-20
担当：今井浩

問題 1.

n 点からなる単純・連結な平面グラフ G を考える。

- (1) G に関して成り立つ Euler の公式を書け (証明は不要)。
- (2) G には次数が 5 以下の点が存在することを示せ。
- (3) G が 6 色で彩色可能であることを示せ。

$$6n \leq 4e = 2|E|$$

$$3n \leq |E|$$

$$|E|$$

問題 2.

左点集合 U , 右点集合 V , 枝集合 E の 2 部グラフ $(U, V; E)$ を考える。 U の各点 u に整数の供給量 $\text{supply}(u)$ が与えられ、 V の各点 w に整数の需要量 $\text{demand}(w)$ が与えられ、総供給量と総需要量は等しいとする。さらに枝 $e = (u, w)$ に対して単位量を点 u から点 w に輸送したときにかかる費用 $w(e)$ が与えられている。

- (1) このとき、需給関係を満たす輸送の方法で、総費用が最小となる問題を、式によって表せ。
- (2) 需給関係を満たす輸送の方法が存在しない場合、存在しないことを示す多項式時間の方法を与えよ。
- (3) $\text{demand}(u) = 1 (u \in U), \text{supply}(w) = 1 (w \in V)$ のとき (このとき $|U| = |V|$)、この問題を解く多項式時間アルゴリズムを与えよ。
- (4) $\text{demand}, \text{supply}$ が一般の場合のアルゴリズムの計算量はどうか?

問題 3.

$\max\{2x_1 + x_2 \mid x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_1 + 2x_2 \leq 3, x_1, x_2 \geq 0\}$ なる線形計画問題について、以下の問に答えよ。

- (1) 標準形に変換せよ。
- (2) 元の問題での原点に対応する解からスタートして、単体法により最適解が得られる過程を示せ。ピボットの選び方に任意性がある場合は、それぞれを選んだ場合の過程を示せ。
- (3) この問題の双対問題を記述し、その最適解を与えよ。
- (4) 主問題・双対問題それぞれの最適解の対について、相補性条件が成立していることを記述せよ。

問題 4. 要素が 0,1 からなる $n \times n$ 行列 A で、各行の 1 が連続して現れているとする。

- (1) totally unimodular の定義を述べよ。
- (1) この行列 A は totally unimodular か?
- (2) A の各行を点で表し、2 つの行が同じ列に 1 をもつとき対応する 2 点を枝で結ぶことによって得られるグラフ $G(A)$ を考えると、 $G(A)$ が perfect か?

$$\max \quad \text{with} \quad x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$