離散数学

Shortest Paths

有向グラフ $G = (V, E)$

点 s から他の点への最短路 ~~経~~ を求める.

枝 e の長さ $d(e)$

- Dijkstra
- Froyd - Warshall

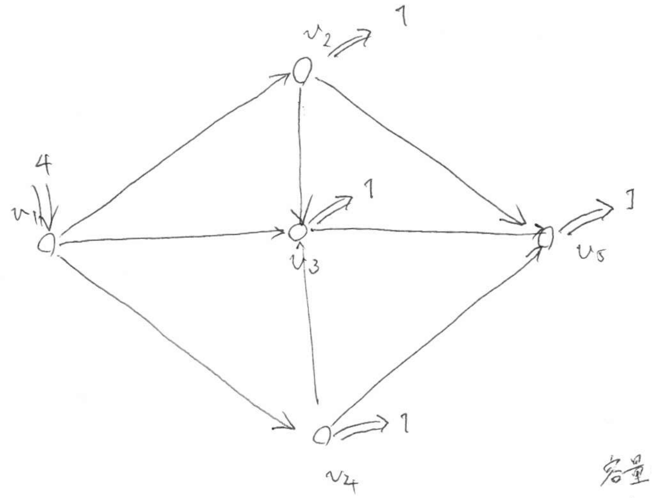
線形計画法として考える.

点 s : 湧き出し量 $|V| - 1$

他の各点 : 湧き~~出し~~こみ量 1

容量制約なし. (上限なし)

e.g.



容量制約

$\updownarrow$

$$\min d^T x \quad \text{s.s} \quad -Hx = \begin{pmatrix} -(|V|-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0$$

H: グラフ G の接続行列.

$$H = (h_{ve})$$

$$h_{ve} = \begin{cases} 1 & e = (v, w) \in E \qquad v \xrightarrow{e} w \\ 0 & \cancel{e = (v, w) \notin E} \ \text{otherwise} \\ -1 & e = (u, v) \in E \qquad u \xrightarrow{e} v \end{cases}$$

$$H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{flow}}}{H x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 点 v での流出量 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Complementary Slackness

(D)

$$\min \begin{pmatrix} -(|V|-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} y \quad \text{s.t.} \quad (-H)^T y \leq d$$

$$-y(u) + y(v) \leq d(e) \quad (e \in E).$$

パスが通っている

$x(e) > 0 \rightarrow -y(u) + y(v) = d(e)$

$-y(u) + y(v) < d(e) \rightarrow$ パスが通っていない $x(e) = 0$

$u \xrightarrow{e} v$

この二つは一緒.

yにゲタをはかせられる.

w.l.o.g

一般性を失わずに

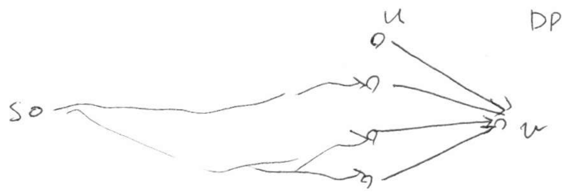
$y(s) = 0$ とできる.

$(-y(u) + y(u) \leq d(e))$

$y(v)$: 点sから点vへの最短路長

$$y(v) = \min \{ y(u) + d(e) \mid e = (u, v) \in E \}$$

= DPの方程式

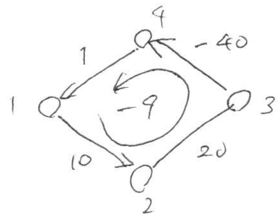


Prop.

Dual が infeasible. (条件を満たす y が存在しない)

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ negative directed cycle.

e.g.



$\because$ "$\Rightarrow$" "Floyd-Warshall"

for

for

for

DPの式

$\Leftarrow$ は 構成的に示せる

Dual が feasible なら ~~Primal~~ ステートをみたす y が存在する.

"$\Leftarrow$"

$$
\begin{aligned}
& -y(1)+y(2) \leq 10 \\
& -y(2)+y(3) \leq 20 \\
& -y(3)+y(4) \leq -40 \\
+)\ & -y(4)+y(1) \leq 1. \\
\hline
& 0 \leq -9
\end{aligned}
$$

//.

最小費用流

$$\min\ d^T x \quad \text{s.t.} \quad -Hx = b,\ 0 \le x \le c.$$

$d(e)$: 長さ，費用．

$c(e)$: 容量．

正規形

(P)

$$\min\ d^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -H & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \qquad x, z \ge 0.$$

(D)

$$\min\ b^T y + c^T w$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -H^T & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

相補性条件

$$u \xrightarrow{e} v$$

$x(e) > 0 \rightarrow -y(u) + y(v) + w(e) = d(e)$

$z(e) > 0 \rightarrow w(e) = 0.$

$-y(u) + y(v) + w(e) \le d(e) \rightarrow x(e) = 0$

$w(e) < 0 \rightarrow z(e) = 0$

$0 = x(e) < c(e)$

$\rightarrow z(e) = c(e) - x(e) > 0 \rightarrow w(e) = 0.$

$\Rightarrow -y(u) + y(v) \le d(e)$

Dual での条件.

$0 < x(e) < c(e)$

$\rightarrow z(e) > 0 \rightarrow w(e) = 0$

$\rightarrow x(e) > 0$

$\Rightarrow -y(u) + y(v) = d(e)$

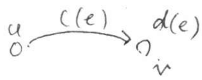
$0 < x(e) = c(e)$

$\rightarrow -y(u) + y(v) + w(e) = d(e),\ w(e) \le 0$

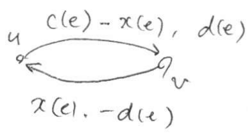
$\Rightarrow -y(u) + y(v) \ge d(e)$

ネットワーク $N = (G; c, d; h)$

$0 = x(e) < c(e) \rightarrow$



$0 < x(e) < c(e) \rightarrow$



$0 < x(e) = c(e) \rightarrow$

Th.

最小費用流問題である実行可能解なフロー x が最適解（最小費用）．

（そのフロー x の流量の流れの中で）

$\Leftrightarrow$ 補助ネットワーク $N(x)$ に負の有向閉路が存在しない．