参考書

C.H. Papodimitriou, Steiglite,

Combinatorial Optimization

Prentice Hall, 199? ?

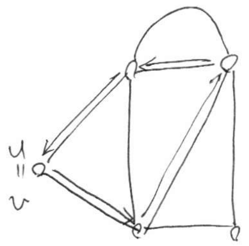
Diestel : Graph Theory

Th. グラフ $G=(V,E)$ が Eulerian

⇔ 全ての点の次数が偶数

Claim: 各点の次数が偶数。~~のとき~~ この時, 点 v からスタートして path をのばし, ~~最後~~終的にその点 u から出ていくどの枝も path に含まれるとすると　（各枝は高々一度しか通らない）

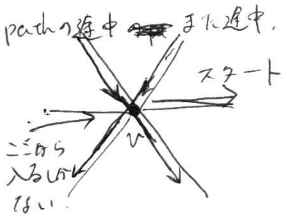
$u = v$



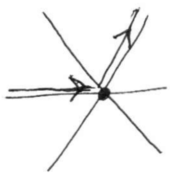
Claim の証.

点 v をスタート：点 v に接続する枝の一つを使う.

⇒ 点 v の残りの枝：奇数本



他の点 w



パスが点 w にのびてきたとき
それまで点 w には偶数本の
残った枝がある.
⇔ 入って出て2本使う.　//

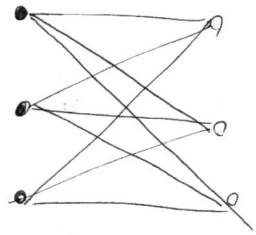
⇐) Claimを使ってinduction //

<u>Th</u>. グラフ $G=(V,E)$: bipartite

⇔ 各閉路の長さ(枝数): 偶数

∵) algorithmicな証明

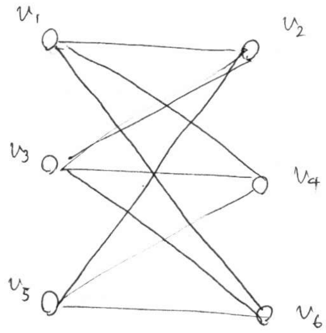
⇒) 自明 (逆向き⇐の証明に比べたら自明というぐらいの意味)

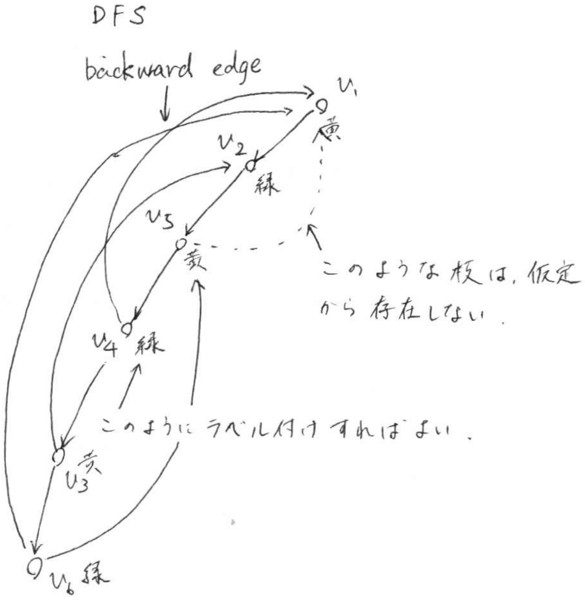


黒からスタートすれば次は白, 次は黒…

→ 当然偶数長.

⇐) Depth-First Search



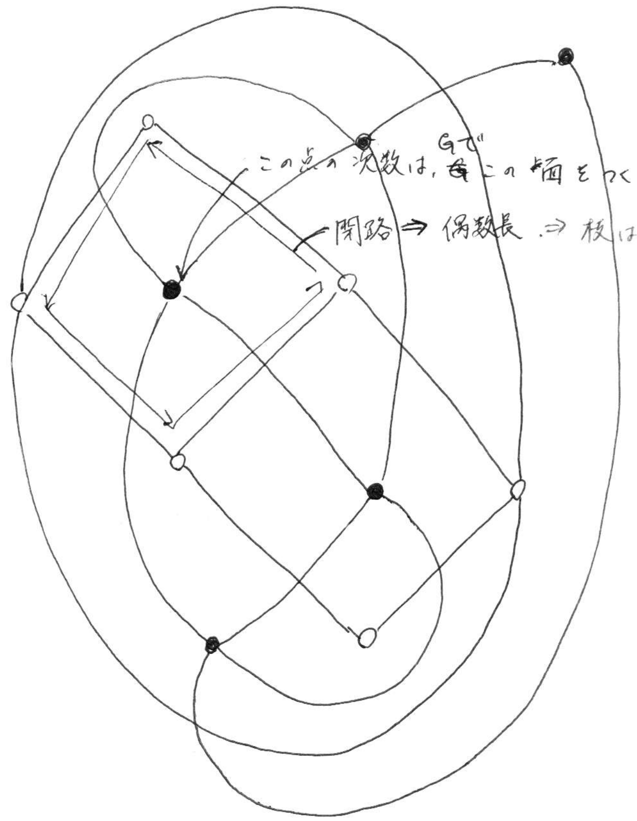


Th. 平面グラフ $G=(V,E)$ とその双対面グラフ G^*

このとき G: bipartite $\Leftrightarrow$ G^*: Eulerian

∵)

例.



⇒). ~~白がbipartite ⇒~~ 白がbipartite ⇒

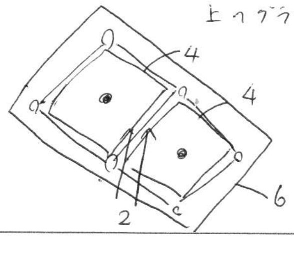
embedding で各面は、偶数本数の枝からなる.

⇐) $4+4-2=6$

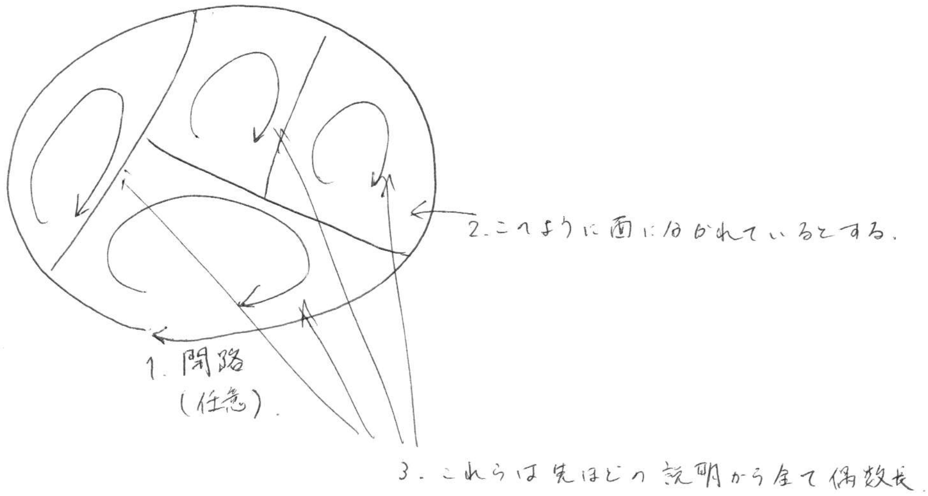
even even　　even

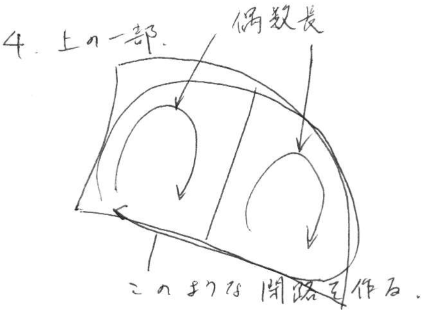
黒の次数　　白の閉路長

上のグラフの一部



各ジョルダンの閉曲面について考えればよい。





このような閉路を作る。

→ これは先ほどの説明から偶数長。

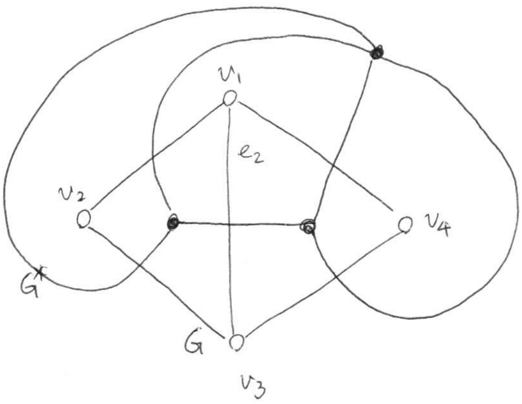
⇒ 5. これを繰り返せば 1.の閉路が偶数長であることが分かる。

$\mathbb{Z}_2$ (modulo 2) を考える.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

G の接続行列 (incidence matrix)



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

rank = 3.

一次独立，一次従属

列 e_1, e_2, e_4 をもってくる

$$
\begin{array}{ccc}
e_1 & e_2 & e_4
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
e_1 + e_2 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

→ 一次従属，極小、（一つ減らすと一次独立）

⇔ 閉路

列 e_1 e_2 e_3

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

一次独立，~~木~~ 極大（どの辺を加えても一次独立）.

⇔ 閉路なし，木

$$
\begin{array}{c|ccc|cc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
\hline
v_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & E_3 & & &
\end{array}
$$

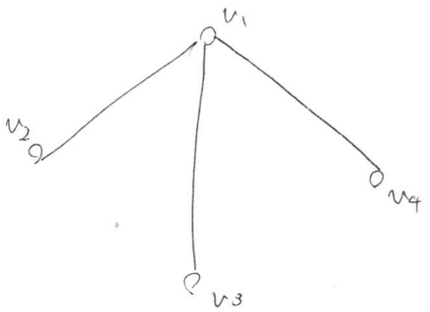
rank = 3 なので 1本冗長

→ v_1 を消した.

各行は cut set に対応している.

単位行列が~~表わ~~現れた、

spanning tree に対応



$$n-1\left\{\overbrace{\left[\, I \mid N \,\right]}^{m}\right. \qquad m-n+1\left\{\overbrace{\left[\, N^T \mid I \,\right]}^{m}\right.$$

この二つの行列を考える.

$|V| = n,\ |E| = m$

$$[N^T \mid I] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 と e_2 と e_4 で閉路 \\ \leftarrow e_2, e_3, e_5 で閉路 \end{array}$$

木にできる閉路を表している.

$\updownarrow$ 直交（行同士の内積が 0）

$[I \mid N]$

<u>Th.</u> G の接続行列の直交補空間を表す行列が，グラフ G' の接続行列に対応

$\Leftrightarrow$ G : planer , $G' = G^*$