参考書

C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz
Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity
Dover 1982.

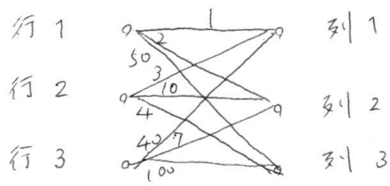
Min - Cost Flow

特別な場合

1	2	50
3	10	4
40	7	100

各行から一つ、
各列から一つ　選んで和を最小にする。

一般に Assignment Problem (割当問題)

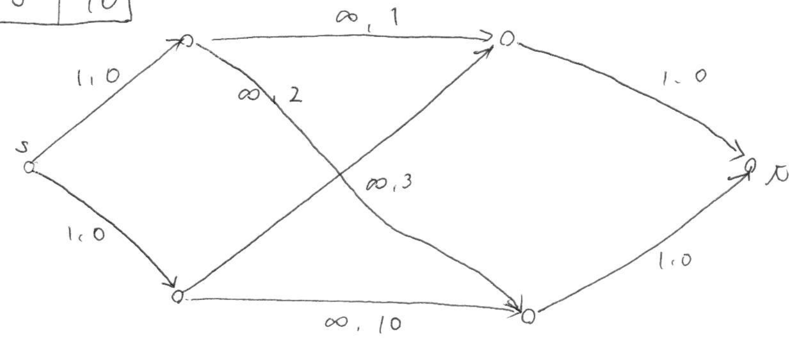


完全2-部グラフ

各行各列から一つ ⇔ Perfect matching.

$O(n^3)$で解ける。(全探索なら $O(n!)$)

1	2
3	10



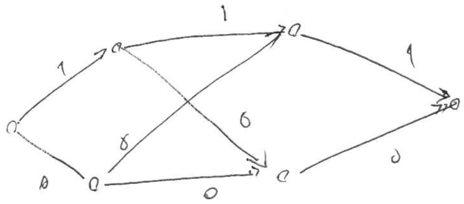
capacity, cost.

「流量2の流れで最小費用のもの」

f_0: ゼロ流れ

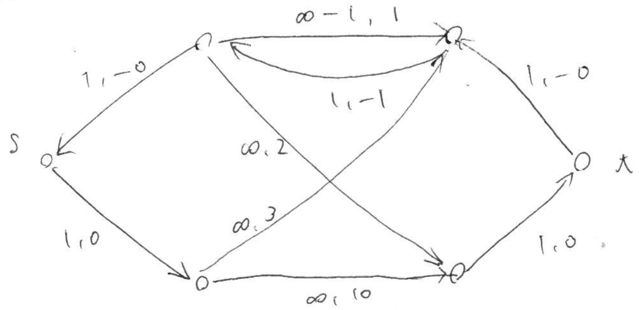
補助ネットワーク $N(f_0)$ で 点s→点t の 最短路.

→ それに沿って1流す.



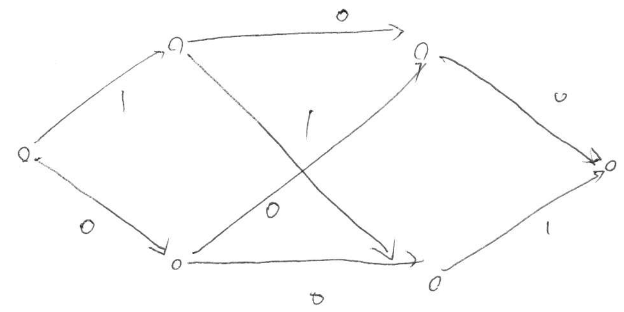
流れ f_1.

$N(f_1)$

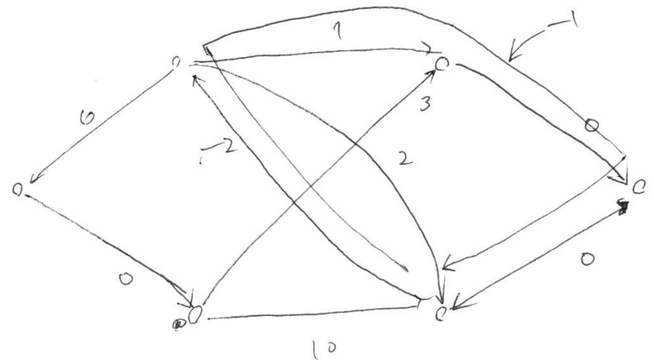


負の有向閉路なし. 流量1の流れで Min-Cost.

f_1' 最適でないもの



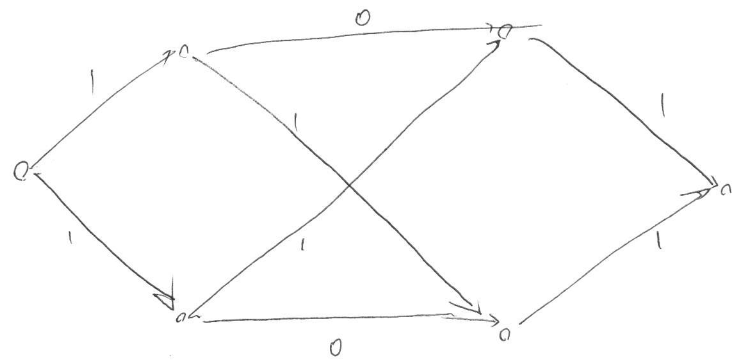
$N(f_1')$



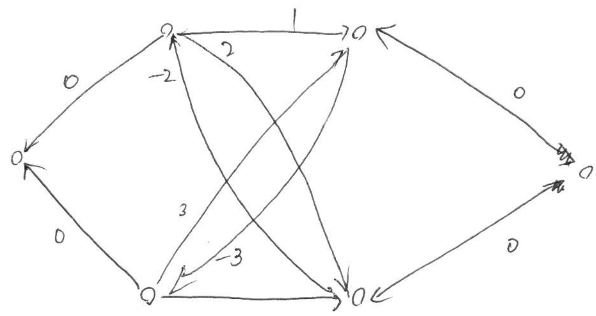
−1の有向閉路がある.

→これに沿って逆向きに1流す → 最適

f_2



$N(f_2)$



流量2で最適.

負の有向閉路なし.

Min − Cost

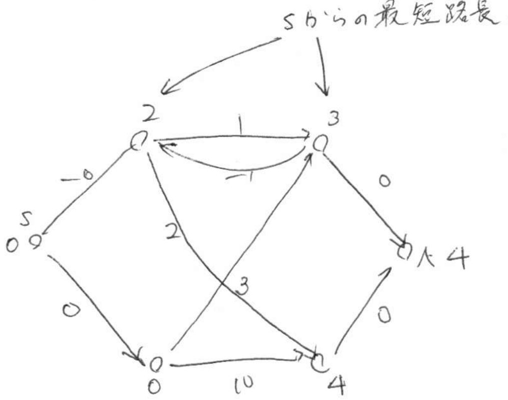
1. 流量 0 で 最小費用 の ゼロ流れ $f = f_0$ からスタート

2. 補助ネットワーク $N(f)$ で 点 s から 点 t への 最短路を求める.

   2.1 なければ stop. 最大流量 で 最小費用

   2.2 その 最短路 にそって 最大限流す.

$N(f_1)$



相補性条件.

$y(v)$: 点 s から点 v への 最短路長

⇒ この $y(v)$ が 相補性条件をみたす.

正当性.

例による説明. → 理論は明白.

一般の 最小費用流

F : 最大流量 $O(F \cdot |V|^2)$ time

pseudo-poly-time

Min - Cost

$\min\ d^T x$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -Hx = b \\ 0 \leq x \leq c \end{cases}$$

H: (点枝) 接続行列

アルゴリズム

⇒ 容量が整数ならば

最小費用流: 整数性をみたすものが存在.

(max - flow 時と同じ).

<u>Def</u> (totally unimodular)

行列 A が totally unimodular

⇔ A の任意の正方部分行列 の行列式が, 0, ±1.

Th. 有向グラフの接続行列 H: totally unimodular

帰納法による (部分行列 $k \times k$, その k について)

(Induction Basis)

$k = 1$ 成立.

(Induction Step)

$k \times k$ 部分行列に着目.

(Case I) ある列 $= 0$ → 行列式 $= 0$.

(Case II). ある列について非ゼロ要素数が 1. → その列について展開.

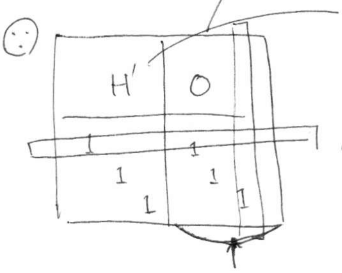
(Case III). 全ての列について 1 と −1 が存在 → 全行ベクトルの和=0

→ 行列式 $= 0$.

Cor

$$\begin{pmatrix} -H & O \\ I & I \end{pmatrix}$$ totally unimodular

∵



③ Hの部分行列 $0, \pm 1$

② 行ベクトル展開 $\pm 1, 0$

① 列ベクトル展開 0

$$\min \ c^T x$$

s.t. $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$A = \boxed{B \mid N}$ totally unimodular

$$\begin{pmatrix} \cancel{B} B^{-1} b \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$ 基底解. → integral.