離散数学

Discrete Mathematics

担当：今井 浩 imai@is.s.u-tokyo.ac.jp

単位は試験

Prerequisite

アルゴリズムとデータ構造

- グラフ探索 DFS, BFS
- 最短路問題
- 最小木問題

(2部グラフのマッチング)

- グラフの表現
  データ構造

内容

- 平面グラフ
- 2部グラフ, Eulerグラフ

- - - - - - -

- 最大流問題
  max-flow min-cut th.
  - 2部マッチング
  - Mengerの定理 (連結度)

・線形計画法

　Duality th.

・最小費用流

- - - - -

・Perfect Graph

　・区間グラフ

- - - - -

・Matroid

　独立性の抽象化

<u>双対性</u>

<u>範囲</u>

良い離散構造 ≈ 効率よく解ける問題 ↑ 今期

良い離散構造がない ≈ 効率よく解くことは難しい ↓ 来期

4月：平面グラフ，2部グラフ，Euler グラフ，区間グラフ

5月：Max flow から

平面グラフ

グラフ　$G = (V, E)$

2つのものがあってその間に関係がある・ないというのがグラフ

V：点集合（有限）　vertex

E：枝集合（有限）　edge

$E \subseteq V \times V$

無向　$(u, v) \sim (v, u)$　：同じものとみなす

完全グラフ：任意の2点を結ぶ枝がある

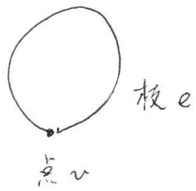
K_1（1点からなるグラフ）

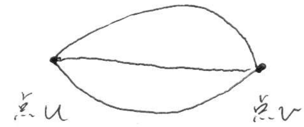
K_2

K_3

⋮

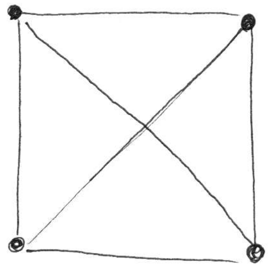
K_n：n点からなる完全グラフ（無向）

通常，自己閉路 

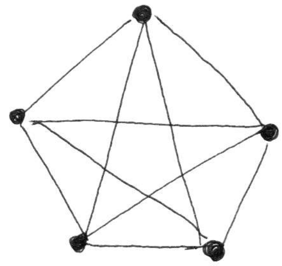
，並列枝 

は無し．

→ simple graph



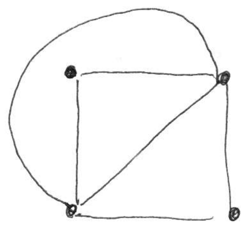
K_4



K_5

K_n は $\binom{n}{2}$ 本の枝をもつ．

枝の交差は本質的か？

K_4 は  のようにもかける．

K_4 は枝交差なく描ける．

K_4

このように配置すると直線分だけでかける.

じゃあ K_5 も交差をなくせるか?

G が planer (平面的)

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 平面上にうまく描くと, 枝交差なしに描ける.

(= (imbed)

K_4: planer

K_5: nonplaner

これを combinatorial に証明しましょう.

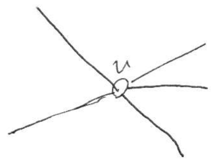
組合せの話をやりましょう.

K_n の枝数 $= {}_nC_2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

点 v $(\in V)$ の次数 $d(v)$

= 点 v に接続する枝数

incident



$d(v) = 5$

Prop. $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

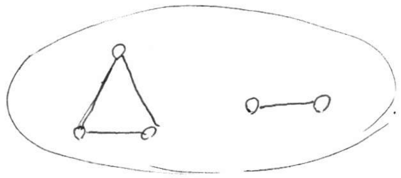
∵ 点と枝の接続関係の数

左辺: 点の方から数え上げ

右辺: 枝 〃 〃

Gが連結 (connected)

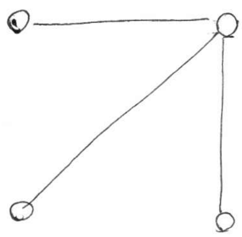
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 任意の2点間にパスが存在



5点からなるグラフ：非連結

T ($\subseteq$E) が~~本~~木 (tree, spanning tree)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 閉路を含まず、全点をTの枝のみで連結にするもの.



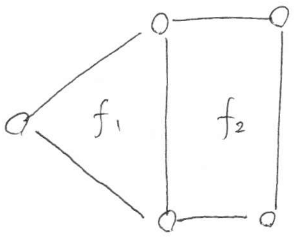
$\Longleftrightarrow$ $|V|-1$ 本の枝で連結にするもの

4点からなる木

平面グラフ ⟶ 平面描画

planar graph　　plane grah

⇓



$G = (V, E, F)$

描いたことによって面を考えることができる。

f_3 外面.

<u>Th.</u> (Euler の公式)

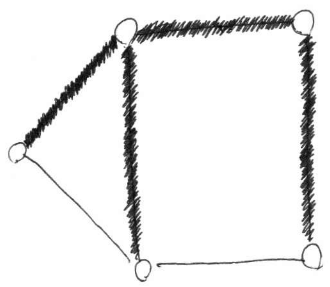
Plane graph $G = (V, E, F)$ について,

$|V| - |E| + |F| = 2$

0次元　1次元　2次元

$(\Leftrightarrow (-1)^0 |V| + (-1)^1 |E| + (-1)^2 |F| = 2)$.

∵) (例による説明).



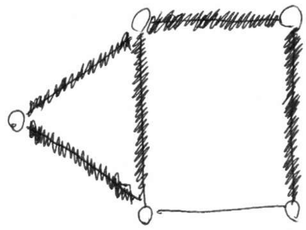
この木を考える.

外面しかないので $|F| = 1$.

$|V| - |E| + |F| = 2$.

よって木は planar graph.

次に枝をつけ加える.



元々木なので 点の数は変わらないので 5

枝を加えたので 枝の数は 5.

閉路ができて面が増えたので 2.

$5 - 5 + 2 = 2.$

もう一本加えると

$5 - 6 + 3 = 2$ invariant //

(simple, connectedで).

Prop. $|V| \geq 3$ の planar graph は, $|E| \leq 3|V| - 6$ をみたす.

∵) Euler の公式より $|V| - |E| + |F| = 2$

枝と面の接続関係の数

$\leq 2|E|$ $\geq 3|F|$ (並列枝なし).

枝の両側~~に違う面~~の面の数は高々2. 三角形以上.

$\Rightarrow 2|E| \geq 3|F|$ //

<u>Prop</u>　K_5 は non planar

∵) 前の Prop より 5点からなるグラフが planar であるためには，

枝数は 9 以下でなければならない．

K_5 の枝数 $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$