集合と位相の基礎知識 2011

複素解析のシケ対の人

平成 23 年 2 月 17 日

1　はじめに

なんか「集合と位相の用語とか出そうなところをまとめたものを作ってくれ」という要望があったので、さくっと作ってみました。主に位相について、重要そうな概念 (いまのところハウスドルフ、コンパクト、連結の 3 つです) と、それについて成り立つ定理をまとめてあります (基本的に Wikipedia からの受け売りです)。証明は載せていませんが、定理のステートメントを知っているより証明を知っていた方が役に立つと思われますので、自分で考えるなり調べるなりしてみると良いのではないかと思います。いろいろ漏れはあると思いますので、おいおい足していきます。

位相の定義など、中間試験までにやった部分はいくら重要でも飛ばすので (のちの版で入れるかもしれませんが) ご容赦ください。

1.1　更新履歴

2011.02.17 β 版公開 2011.02.17 $\beta 2$ 版公開 (やはり $\cap$ と $\cup$ は鬼門！)

2　ハウスドルフ空間

定義 X を位相空間とする。X が **ハウスドルフ** であるとは、任意の相異なる $x, y \in X$ に対して、x の開近傍 U[1] と y の開近傍 V であって、$U \cap V = \emptyset$ であるものが存在することをいう。

この定義だけみると大変わかりにくいですが、「任意の二点を、共通部分のない開集合で分離できる」ということを表しています。

・距離空間はハウスドルフである。特に、$\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ。

・X をハウスドルフ空間とする。$a \in X$ に対し、a は X の閉集合である。

3　コンパクト性

定義 X を位相空間、A をその部分集合とする。A が X の **コンパクト集合** であるとは、任意の開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ に対し、

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

[1] U は x を含む開集合だということです

ならば、有限個の $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ を選んで

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

とできることをいう。X 自身がコンパクトならば、X を **コンパクト空間** という。

　またわかりにくい定義ですが、いろいろな例を出してみます。
・有限集合は (どんな位相でも) コンパクト空間である。
・$\mathbb{R}$ の部分集合 X に対し、X が有界かつ閉集合であることと X がコンパクトであることは同値である。よって、$[0,1]$ はコンパクトだが $[0,1)$ はコンパクトではない。
・コンパクト空間の閉集合はコンパクトである。
・X, Y を位相空間、$A \subset X$ をコンパクト集合、$f : X \to Y$ を連続写像とする。このとき、$f(A)$ はコンパクト集合である。
・ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である。
・コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な全単射は同相写像である [2]。

4　連結性

　二つあります。まずは普通の連結性から。
定義 X を位相空間とする。X が **連結** とは、X の開集合 A, B であって、

$$A \cap B = \emptyset \text{ かつ } A \cup B = X \text{ かつ } A \neq \emptyset \text{ かつ } B \neq \emptyset$$

となるものが存在しないことをいう。
これは、「X と $\emptyset$ 以外に開かつ閉である部分集合が存在しない」と言い換えることもできます。
定義 X を位相空間とする。X が **弧状連結** とは、X の任意の二点 a, b に対し、連続写像 $f : [0,1] \to X$ であって、

$$f(0) = a \text{ かつ } f(1) = b$$

をみたすものが存在することをいう。「X のどの二点も線で結べる」と行いった感じです。
　性質の例を出してみます。
・$\mathbb{R}$ の閉区間は連結である。よって、$[0,1]$ は連結。
・A, B が連結で、$A \cap B \neq \emptyset$ ならば、$A \cup B$ は連結。
・A が連結で、$f : A \to B$ が連続写像なら、$f(A)$ も連結。
・(以上のことを組み合わせると、) 弧状連結な位相空間は連結である。
・$\mathbb{R}^n$ の連結な開集合は弧状連結である。

[2] 逆写像も連続、ということです