連続系アルゴリズム レポート課題4

- 宿題（レポート）
  - 提出状況に応じて，期末試験の点に最大 50 点を加算します
    - まったく提出しなくても，期末試験の点で成績が出ます
    - ただし，試験を受けなければ単位は出ません
  - プログラムだけはメールの添付ファイルで reiji@is.s.u-tokyo.ac.jp に送付してください
    - 所属学科，学年，学籍番号，氏名をメール本文に明記すること
    - メールの題名（Subject）は「連続系レポート課題第4回 提出者氏名」とすること
  - 手計算をするものや，計算結果と考察など，プログラム以外は A4 の紙 1 枚（裏もつかってよい）にまとめてください
    - 所属学科，学年，学籍番号，氏名をレポートの最初に明記すること
    - 次回の講義の前に集めます
    - あるいは PDF で任意ページ数でもよい（プログラムと一緒にメールで送付してください）
- 問題1
- Legendre 多項式を P_0 から P_3 まで求めよ
  - 直交条件から、べき表現の係数を計算せよ
    - 漸化式ではなく，積分の計算からすること
  - 定数係数の自由度がある（適当に選べ）
- 問題2
- 直交多項式をひとつえらび，3 項漸化式を用いて関数値を（コンピュータで）計算せよ
  - グラフを描け
    - コンピュータでグラフが出せなければ，グラフ用紙に手書きしてもよい

漸化式の不安定性

- Bessel 関数 $J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$

$x = 0.52359879$

n	前進漸化式	後退漸化式	真値
0	0.98262654	0.93262654	9.326265674…E-01
1	0.25292956	2.5292956E-01	2.529295727…E-01
2	3.3493214E-02	3.3493205E-02	3.349320805…E-02
3	2.9397267E-03	2.9396817E-03	2.939681959…E-03
4	1.9357481E-05	1.9306485E-04	1.930648801…E-04
5	1.7878304E-04	1.0132040E-05	1.013203961…E-05
6	1.4787563E-03	4.4281712E-07	4.428171509…E-07
7	3.3711817E-03	1.6581635E-08	1.658163695…E-08
8	8.9990878E-02	5.4315024E-10	5.431502504…E-10
9	2.746548	1.5811643E-11	1.581164954…E-11
10	94.32936	4.1394788E-13	4.142062469…E-13

全然違う

発散

杉原正顕，室田一雄，数値計算法の数理，岩波書店より

14

丸め誤差が拡大する.

$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x)$

は安定している.

C 言語補足

- ファイルの読み書き
- ステップ 1. ファイルをオープンする

```
FILE *f;
f = fopen("filename.txt", "w");
if (f == NULL) {
  fprintf(stderr, "cannot open filename.txt¥n");
  exit(1);
}
```

  - FILE *f; ファイルを特定するファイルポインタ
  - f = fopen(ファイル名, モード); ファイルをオープン
    - ファイル名：ファイル名またはパス（相対パス，絶対パス・・・OS による）を指定する
      - ディレクトリ（フォルダ）はあらかじめ作っておく
      - ファイルがない場合の動作は下記
    - モード："w" 書き出し，"r" 読み込み，"a" 追加
      - 読み込みモードで，対象となるファイルがないときは，エラー
      - 書き出し・追加モードで，対象となるファイルがないときは，新しく作成される
    - 帰り値は FILE* 型変数
      - オープンに失敗した場合には，NULL という値が帰る
  - exit(1); プログラムをここで強制終了する

- ステップ 2. ファイルを読み書きする
  - 書き出し

```
n = fprintf(f, "%e¥n", x);
```

  - fprintf:「ファイルへの printf」ということ
    - 最初の引数が，ファイルポインタ
    - あとは printf と同じように引数を続ける
    - 帰り値は，印字した文字の数
  - 読み込み

```
n = fscanf(f, "%lf¥n", &x);
```

  - fscanf:「ファイルへの scanf」ということ
    - 最初の引数が，ファイルポインタ
    - あとは scanf（次ページ）と同じように引数を続ける
    - 帰り値は，正しく入力されたデータ数

- ステップ 3. ファイルをクローズする

```
fclose(f);
```

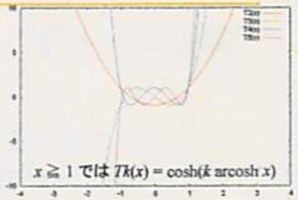
C 言語補足

- scanf による入力
- 形式：n = scanf(フォーマット，引数・・・)
  - 帰り値 n は，正常に入力されたデータ数
  - フォーマットは，printf とちょっと似ている
    - %d 10 進整数(int)
    - %c 文字（1文字）
    - %s 文字列
    - %e あるいは %f 単精度浮動小数
    - %le あるいは %lf 倍精度浮動小数
    - ほかにも %ナントカ という形式がいくつかある（省略）
    - これらの変換文字以外（空白を含む）は，実際の入力とフォーマットとが一致しなければならない（改行は空白と同じ扱い）
    - たとえば scanf("n = %d", &n) となっていれば，入力 n = 10 は OK だが，n=10 はダメ
  - 引数は，変数の頭に & を付ける（ポインタという）
    - ただし，文字列だけは例外で，& を付けてはいけない

```
int day, year;
char month[20];
scanf("%d %s %d", &day, month, &year);
```

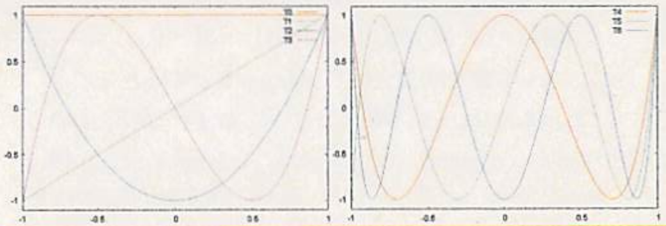
- int feof(FILE *f)
  - ファイル f が終端に来ていれば 1（真）を，それ以外は 0（偽）を返す
  - 何行あるかわからないファイルを読み出せる
- int ferror(FILE *f)
  - ファイル f にエラーがある場合 1 を，それ以外 0 を返す
- char* fgets(char *line, int max, FILE *f)
  - ファイル f から，1 行（改行記号まで，ただし最大 max 文字まで）読み込み，文字列 line に入れる
  - 帰り値は line そのもの，ただしファイル終端の場合には NULL を返す
- int fputs(char *line, FILE *f)
  - ファイル f に，line を書きだす
- FILE *stderr
  - 標準のエラー出力先ファイル
  - オープンしなくても，使える
- FILE *stdin 標準入力（キーボードなど）
- FILE *stdout 標準出力（画面など）

Chebyshev 多項式



- 重み $(1 - x^2)^{-1/2}$
- 具体的な表示

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$



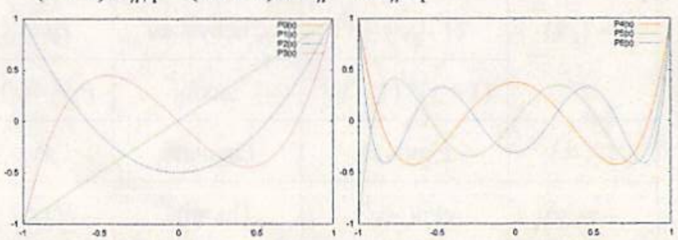
Legendre 多項式

$P_0 = 1$

$P_1 = x$

- 重み 1 に対する直交多項式
- 3 項漸化式

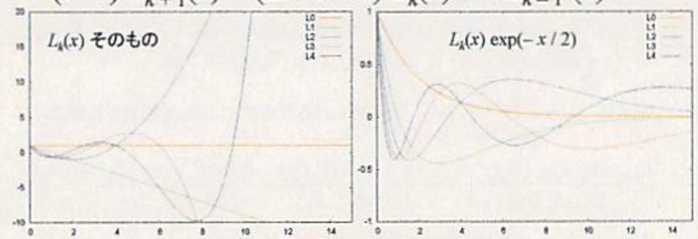
$(n+1)\, P_{n+1} = (2n+1)\, x\, P_n - n\, P_{n-1}$



ラゲール

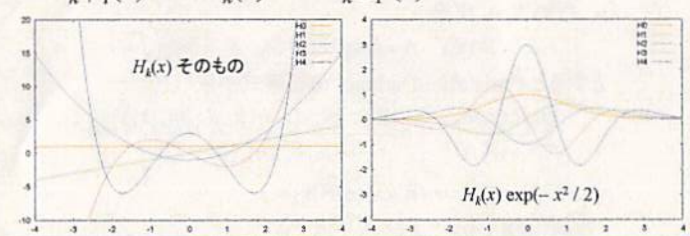
Laguerre 多項式

- $[0, \infty]$ 上での重み $\exp(-x)$ に対する直交多項式
- $L_0(x) = 1,\ L_1(x) = 1 - x$
- $(k+1)\ L_{k+1}(x) = (2k+1 - x)\ L_k(x) - k\ L_{k-1}(x)$



Hermite 多項式

- $[-\infty, \infty]$ の重み $\exp(-x^2)$ に対する直交多項式
- $H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x$
- $H_{k+1}(x) = x\ H_k(x) - k\ H_{k-1}(x)$



Christoffel-Darboux の恒等式

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{R_m(x)R_m(y)}{(R_m,R_m)}=\frac{R_{n+1}(x)R_n(y)-R_n(x)R_{n+1}(y)}{(R_n,R_n)\gamma_n(x-y)}$$

$$\begin{aligned}&R_{n+1}(x)R_n(y)-R_n(x)R_{n+1}(y)\\&=[(\gamma_n x-\alpha_n)R_n(x)-\beta_n R_{n-1}(x)]R_n(y)-R_n(x)[(\gamma_n x-\alpha_n)R_n(y)-\beta_n R_{n-1}(y)]\\&=\gamma_n(x-y)R_n(x)R_n(y)+\beta_n[R_n(x)R_{n-1}(y)-R_{n-1}(x)R_n(y)]\end{aligned}$$

および $\beta_n=\dfrac{\gamma_n(R_n,R_n)}{\gamma_{n-1}(R_{n-1},R_{n-1})}$ から得られる次式を n に関して和を取ればよい

$$\frac{R_{n+1}(x)R_n(y)-R_n(x)R_{n+1}(y)}{(R_n,R_n)\gamma_n(x-y)}=\frac{R_n(x)R_n(y)}{(R_n,R_n)}+\frac{R_n(x)R_{n-1}(y)-R_{n-1}(x)R_n(y)}{(R_{n-1},R_{n-1})\gamma_{n-1}(x-y)}$$

$$\beta_n=\frac{(\gamma_n xR_n,R_{n-1})}{(R_{n-1},R_{n-1})}=\frac{\gamma_n(R_n,xR_{n-1})}{(R_{n-1},R_{n-1})}=\frac{\gamma_n(R_n,R_n)}{\gamma_{n-1}(R_{n-1},R_{n-1})}$$

$$(R_n,R_n)=(R_n,\gamma_{n-1}xR_{n-1}-\alpha_{n-1}R_{n-1}-\beta_{n-1}R_{n-2})=\gamma_{n-1}(R_n,xR_{n-1})$$

1

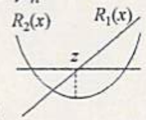
三項漸化式
で展開.

Σとる

零点の分布

- $R_{n+1}(x)$ の隣り合う零点のあいだに，ひとつずつ $R_n(x)$ の零点がある
  - 一般性を失うことなく $\gamma_n=1$ とする；このとき $\beta_n>0$
  - $n=1$ のとき，$R_1(z)=0$ とすると

    $$R_2(z)=(z-\alpha_1)R_1(z)-\beta_1R_0(z)=-\beta_1<0$$



  - $n=k-1$ まで成立として $R_k(z_i)=0$ とすると

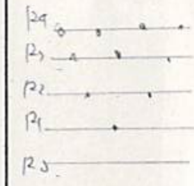
$$R_{k+1}(z_i)=(z_i-\alpha_k)R_k(z_i)-\beta_kR_{k-1}(z_i)=-\beta_kR_{k-1}(z_i)$$

$$\mathrm{sgn}\,R_{k+1}(z_i)\cdot\mathrm{sgn}\,R_{k+1}(z_{i+1})=\mathrm{sgn}\,R_{k-1}(z_i)\cdot\mathrm{sgn}\,R_{k-1}(z_{i+1})<0$$

$$\mathrm{sgn}\,R_{k+1}(-\infty)\cdot\mathrm{sgn}\,R_{k+1}(z_1)<0,\quad \mathrm{sgn}\,R_{k+1}(z_k)\cdot\mathrm{sgn}\,R_{k+1}(\infty)<0$$

$$\beta_n=\frac{\gamma_n(R_n,xR_{n-1})}{(R_{n-1},R_{n-1})}=\frac{\gamma_n(R_n,(\gamma_{n-1}x-\alpha_{n-1})R_{n-1}-\beta_{n-1}R_{n-2})}{\gamma_{n-1}(R_{n-1},R_{n-1})}=\frac{\gamma_n\|R_n\|^2}{\gamma_{n-1}\|R_{n-1}\|^2}$$

3



選点直交性

- $R_n(x)$ の零点を z_i とすると，$l, m<n$ に対し

$$\sum_{i=1}^{n}R_l(z_i)R_m(z_i)w_i=\delta_{lm}(R_m,R_m)\qquad \frac{1}{w_i}=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{R_r(z_i)^2}{(R_r,R_r)}$$

  - 行列 R, Δ, W を

$$r_{ij}=R_j(z_i),\quad \Delta=\mathrm{diag}(1/\|R_i\|),\quad W=\mathrm{diag}(\sqrt{w_i})$$

とすると Christoffel-Darboux の恒等式から

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{R_r(z_i)R_r(z_j)}{(R_r,R_r)}=\frac{R_n(z_i)R_{n-1}(z_j)-R_{n-1}(z_i)R_n(z_j)}{(R_{n-1},R_{n-1})\gamma_{n-1}(z_i-z_j)}=0$$

$$\Rightarrow R\Delta^2R^T=W^{-2}\Rightarrow (WR\Delta)(\Delta R^TW)=I$$

$$\Rightarrow (\Delta R^TW)(WR\Delta)=I\Rightarrow R^TW^2R=\Delta^{-2}$$

2

重要な重み関数と直交多項式系

区間	重み	直交多項式系	記号
$(-1, 1)$	1	Legendre	$P_n(x)$
	$(1-x^2)^{-1/2}$	Chebyshev	$T_n(x)$
	$(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$	Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$(0, \infty)$	$\exp(-x)$	Laguerre	$L_n(x)$
$(-\infty, \infty)$	$\exp(-x^2)$	Hermite	$H_n(x)$

4

連続系アルゴリズム 11/7

ノルム $\|u\|$ ← ベクトル空間の元

(正値性) $\|u\| \geq 0$. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(スカラー倍) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

(三角不等式) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$d(u,v) = \|u-v\|$ と定義すると 距離の公理を満たす.

(正値性) $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

(対称性) $d(u,v) = d(v,u)$

(三角不等式) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

内積 (u,v). 内積の公理

(正値性) $(u,u) \geq 0$, $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(対称性) $(u,v) = (v,u)$

(双線形性) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$

$(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u,v) + \beta(u,w)$

内積 (u,v) があって, $\|u\| = \sqrt{(u,v)}$ はノルムとなる → キョリが定義できる

☆ Schwarz の不等式

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

関数空間の内積

重み関数 $w(x)$ は次を満たすとする.

1. 区間 $[a,b]$ で正の連続関数.
   - 有限個の点で $w(x) = 0$ であってもよい.
2. (無限区間でも) 積分 $\int_a^b w(x)dx < \infty$ ならよい.

無限でもよいが 積分は有限に収まる

$[a,b]$ 上の実連続関数 f, g に対し

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

は内積となる.

(内積の公理をみたす)

直交多項式系 $\quad \llcorner j \in \mathbb{N}$

多項式系 $\{R_j(x)\}$ が直交多項式であるとは.

1. $m \neq n$ なら $(R_m(x), R_n(x)) = 0$

2. $R_m(x)$ は m 次多項式

。定数倍の自由度がある.

定数倍を除いて一意 $\quad$ か?

。$R_n(x)$ は $n-1$ 次の任意の多項式 $p(x)$ と直交

$(R_n, p) = 0$

$=$

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} c_i R_i(x).$$

三項漸化式 (Lanczos原理)

Gram-Schmidt の直交化を $\gamma_n x R_n(x)$ に適用

$$R_{n+1} = \gamma_n x R_n - \sum_{m=0}^{n} \frac{(\gamma_n x R_n, R_m)}{(R_m, R_m)} R_m$$

ここで, $(\gamma_n x R_n, R_m) = \gamma_n (R_n, x R_m)$ 自己随伴

. x が右にあっても左にあってもよい.

$m < n-1$ なら. $(\gamma_n x R_n, R_m) = 0$.

よって. ($m = n$, $m = n-1$ の項しかのこらないので)

$$\underline{R_{n+1}} = \gamma_n x R_n - \frac{(\gamma_n x R_n, R_n)}{(R_n, R_n)} R_n - \frac{(\gamma_n x R_n, R_{n-1})}{(R_{n-1}, R_{n-1})} R_{n-1}$$

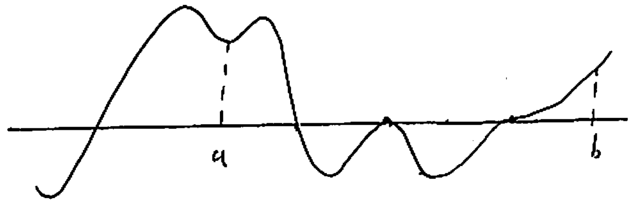
$$= (\gamma_n x - \alpha_n)\underline{R_n} - \beta_n \underline{R_{n-1}}$$

三項漸化式.

($R_{-1} = 0$ とすれば.
$n = 0$ でも成立)

零点の個数と範囲.

定理 $R_n(x)$ の零点は n 個あって
すべて (a,b) 内の単根.



∵) $R_n(x)$ が符号を変える (a,b) 内の点の
数を m として,

それらを $a<c_1<c_2<\cdots<c_m<b$ とする

$0\le m\le n$ であり,

$$q(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-c_i) \quad \text{とする.}$$

$R_n(x)\,q(x)$ は (a,b) 内で符号一定.

よって $(R_n, q)\neq 0$.

しかし, R_n は $n-1$ 次以下の多項式と直交.

よって $m<n$ なら $(R_n, q)=0$ で矛盾.

∴ $m=n$.

$$\int_a^b R_l(x)R_m(x)w(x)\,dx=\delta_{lm}(R_n,R_n), \quad l, m \text{ について}$$

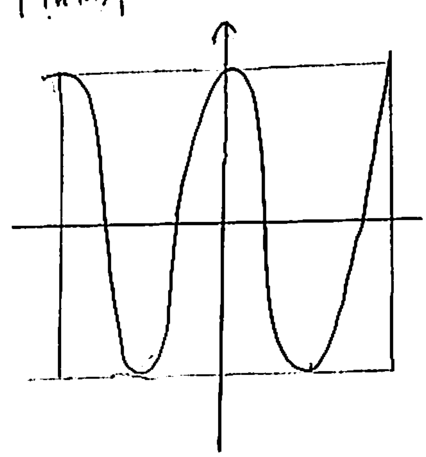
$$\sum_{i=1}^{n} R_l(z_i)R_m(z_i)\,w_i=\delta_{lm}(R_n,R_n)$$

~~$l<n$~~ $l\ m<n$

Chebychev 多項式.

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

$$\cos(n-1)\theta+\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta$$



$$\begin{cases} x \Leftrightarrow \cos x \\ T_n(x)=\cos(n\theta) \end{cases} \quad \text{とする.}$$

$$T_{n-1}+T_{n+1}=2xT_n$$

$$T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1} \quad \text{漸化式を得る.}$$

零点 $z_k=-\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$