連続系アルゴリズム 期末試験

2012 年 1 月 23 日

問題は全部で 6 題あり、1A-1B, 2A-2B, 3A-3B のように 2 つずつ 3 組になっている。1, 2, 3 それぞれの A-B 組から 1 題ずつを選んで解答せよ。ただし、A を合計 2 題、B を合計 1 題選ばなければならない。

すなわち、(1A, 2A, 3B), (1A, 2B, 3A), (1B, 2A, 3A) の 3 種類の組み合わせのうち、いずれかを選択して答えよ。

「単位はほしいが試験がやばい」と思う人は，未提出の宿題およびこの問題をできるだけ解いて須田まで提出せよ.（東京大学 情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 須田礼仁）

問題 1A（配点 25 点）

次の命題が真であれば証明し、偽であれば反例を示せ。

「下三角行列の逆行列は下三角行列である」

問題 1B（配点 50 点）

$n \times n$ 行列 A に対して，

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j \in \mathbf{n}} \left\{ \sum_{i \in \mathbf{n}} |a_{ij}| \right\} \\ \|A\|_\infty &= \max_{i \in \mathbf{n}} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{n}} |a_{ij}| \right\} \end{aligned}$$

と表されることを示せ．ただし $\mathbf{n} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ である．

問題 2A（配点 25 点）

常微分方程式 $dy/dx = f(x, y)$ の初期値問題（初期値 $y(0) = y_0$）を解くための後退 Euler 法のアルゴリズムを示せ．

後退 Euler 法の絶対安定領域が左半平面（$\Re z < 0$）を含むことを証明せよ．

問題 2B（配点 50 点）

1. 1 次元区間 $[0, 1]$ 上の $2n - 1$ 次の積分公式は，少なくとも n 個の標本点を持つことを証明せよ．
2. 同様にして，2 次元正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の $2n - 1$ 次の積分公式に必要な標本点の数の下限を見積もれ．
3. 1 次元 n 点の Gauss-Legendre 積分公式を用いて，n^2 個の標本点を持つような 2 次元正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の $2n - 1$ 次の積分公式を構成せよ．

問題 3A（配点 25 点）

Richardson 加速を以下の観点で説明せよ。(1) どのような仮定か。(2) どのようにして公式が導かれるか。(3) なぜ収束が加速されるのか。

問題 3B（配点 50 点）

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の計算を考える。

倍精度浮動小数点の正規化数の表現範囲はおよそ 10^{-308} から 10^{308} である。このため、$x = 3 \times 10^{-200}$, $y = 4 \times 10^{-200}$ の場合，$r = 5 \times 10^{-200}$ は倍精度で表現できる値であるにも関わらず、

```
r = sqrt(x * x + y * y);
```

というコードではアンダーフローのため計算値が 0 になってしまう。また、$x = 3 \times 10^{200}$, $y = 4 \times 10^{200}$ では計算途中でオーバーフローしてしまう。

x, y, r がすべて倍精度の正規化数で表現できるならアンダーフローやオーバーフローを起こさないで r を計算するコードを書け。

ただし $x = 1$, $y = 10^{-200}$ のような場合には丸め誤差の範囲で r は 1 であり、y^2 がアンダーフローしても結果に影響がないものとみなす。