$(\to \cup \leftarrow)^*$ が $\to$ を含む最小の同値関係であることを示せ。

まず、$(\to \cup \leftarrow)^*$ が同値関係であることを示す。

(反射律)$(\to \cup \leftarrow)^0 = (\equiv)$ より成立。

(推移律)任意の λ 式 A, B, C に対し、

$A(\to \cup \leftarrow)^* B \wedge B(\to \cup \leftarrow)^* C \iff \exists n, m \in \mathbb{N}. A(\to \cup \leftarrow)^n B \wedge B(\to \cup \leftarrow)^m C$

$\iff \exists n, m \in \mathbb{N}. A(\to \cup \leftarrow)^{n+m} C$

であるから、成立。

(対称律)任意の λ 式 A, B に対し、$A \leftarrow B \iff B \to A$ なので、

$A(\to \cup \leftarrow)B \iff B(\to \cup \leftarrow)A$ が成り立つので、このことと推移律により成立。

次に、$\to$ を含む最小の同値関係を R_m とし、$(\to \cup \leftarrow)^* = R_m$ を示す。
それには $(\to \cup \leftarrow)^* \subseteq R_m$ を示せば良い。
そこで、n に関する帰納法により

$$\forall \in \mathbb{N}. (\to \cup \leftarrow)^n \in R_m$$

を示す。
・$n = 0$ のとき

$$\begin{aligned} A(\to \cup \leftarrow)^0 B &\iff A \equiv B \\ &\iff A R_m B \qquad (\because) R_m\text{の反射律}) \end{aligned}$$

より、$(\to \cup \leftarrow)^0 \subseteq R_m$ が成立。
・$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} A \to B &\iff A R_m B \qquad (\because)(\leftarrow) \subseteq R_m) \\ A \leftarrow B &\iff B \to A \\ &\iff B R_m A \qquad (\because)(\leftarrow) \subseteq R_m) \\ &\iff A R_m B \qquad (\because) R_m\text{の対称律}) \\ \therefore \quad &(\to \cup \leftarrow) \subseteq R_m \end{aligned}$$

・ある $n \in \mathbb{N}$ 以下の全ての自然数で成り立つとする。
すると、

$$\begin{aligned} A(\to \cup \leftarrow)^{n+1} B &\iff \exists C \in \Lambda. A(\to \cup \leftarrow) C \wedge C(\to \cup \leftarrow)^n B \\ &\iff \exists C \in \Lambda. A R_m C \wedge C R_m B \qquad (\because) \text{帰納法の仮定より}) \\ &\implies A R_m B \qquad (\because) R_m\text{の推移律}) \\ \therefore \quad &(\to \cup \leftarrow)^{n+1} \subseteq R_m \end{aligned}$$

より、$n + 1$ でも命題が成り立つ。
以上より、$\forall \in \mathbb{N}. (\to \cup \leftarrow)^n \in R_m$ が成り立ち、したがって

$$(\to \cup \leftarrow)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\to \cup \leftarrow)^n \subseteq R_m$$

なので、$(\to \cup \leftarrow)^*$ は $\to$ を含む最小の同値関係である。
Q.E.D

$\Theta F = {}^{*}F(\Theta F)$ を確かめよ。

$\Theta F = F(\Theta F)$ を確かめれば十分である。

$$
\begin{aligned}
\Theta F &= (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))F \\
&= (\lambda xy.y(xxy))(\lambda zw.w(zzw))F \\
&= (\lambda y.y((\lambda zw.w(zzw))(\lambda zw.w(zzw))y))F \\
&= F((\lambda zw.w(zzw))(\lambda zw.w(zzw))F) \\
&= F(\Theta F)
\end{aligned}
$$

より、確かに成り立つ。Q.E.D.

$$
\begin{cases}
\overline{\mathbf{fact}} \overset{\text{def}}{\iff} Y(\lambda gn.\overline{\mathbf{if}}\ (\overline{\mathbf{iszero}}\ n)\ \overline{\mathbf{1}}\ (\overline{\mathbf{mul}}\ n\ (g\ (\overline{\mathbf{pre}}\ n)))) \\
\Phi = \lambda n.\perp \qquad\qquad (\perp \text{ は } undefined)
\end{cases}
$$

とする。
Φ を部分関数とすると、$[\![\Phi]\!]$ は空集合。
このとき、

$$
\begin{cases}
(1)\,[\![F]\!] \subseteq [\![G]\!] \implies [\![I(F)]\!] \subseteq [\![I(G)]\!] \\
(2)\,[\![I^n(\Phi)]\!] \subseteq [\![I^{n+1}(\Phi)]\!] \\
(3)\,[\![YI]\!] = [\![\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n(\Phi)]\!] = \,! \\
(4)\,[\![YI]\!] \text{は} [\![I]\!] \text{の最小不動点}
\end{cases}
$$

$[\![]\!]$ と!の定義を写し忘れたためできませんでした。誰か補完 plz。あと、一応これも問題のようなので載せましたが、演習問題としてやっておけと言われていたかが不明です。注意) 元のノートでは fact の定義中の λgn が λg となっていましたが、おそらく誤植だと思われます（Wikipedia 参照）