1.12　再帰的に定義される集合

$$\begin{cases} T_0 = \{\} \\ T_{n+1} = I_A(T_n) \\ I_A(S) = \{\cdot\} + A \times S \times S \\ T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_A(\{\}) \end{cases}$$

(1)I_A は単調
つまり $S \subseteq S' \Longrightarrow I_A(S) \subseteq I_A(S')$
(2)$T_n \subseteq T_{n+1}$
なぜならば

$$\begin{cases} T_0 = \{\} \Longrightarrow T_0 \subseteq T_1 \\ T_k \subseteq T_{k+1} \Longrightarrow I_A(T_k) \subseteq I_A(T_{k+1}) \Longrightarrow T_{k+1} \subseteq T_{k+2} \end{cases}$$

(3)$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n \subseteq I_A(T)$
(4)T は I_A の不動点、つまり $I_A(T) = T$
証明）(3) より、あとは $I_A(T) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ を示せば良い。
$t \in I_A(T)$ とすると、

$$\begin{cases} t =< 0, \{\cdot\} > \\ \exists a \in A \exists x \in T \exists y \in T.(t =< 1, < a, x, y >>) \end{cases}$$

(a)$< 0, \{\cdot\} > \in T_1 \subseteq T$ より、このとき $t \in T$
(b)$t =< 1, < a, x, y >>$: $x \in T_k \land y \in T_k$ なる k が存在し、$t \in T_{k+1} \subseteq T$
Q.E.D.

しかし、T のみが方程式 $X \simeq \{\cdot\} + A \times X \times X$ を満たすわけではない。（反例：有理木）
実は T は I_A の最小不動点。つまり

$$I_A(T') = T' \Longrightarrow T' \supseteq T$$

となっている。
問）このことを示せ。

例）A:ASCII 文字集合
ASCII 文字列 $L \simeq \{\cdot\} + A \times L$ (∗)
(1) 有限列の集合 $\displaystyle\sum_{n \leq \mathbb{N}} A^n$

(2) 有限列＋無限列 $\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n + A^{\mathbb{N}}$

問）(2) が (∗) の解であることを示せ。