算法設計要論 レポート課題2

担当教員: 武田 朗子，出題者: 山口 勇太郎

出題日: 2013 年 12 月 17 日
締切日: 2014 年 1 月 14 日

以下の問題群から 2 問選んで解答せよ．ただし，1〜3 より 1 問，4〜6 より 1 問選ぶこと．問題中の記号で，$\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ はそれぞれ整数全体の集合，実数全体の集合を表し，それらの下添字はその範囲に制限した部分集合を表すものとする．また，$O\left(f(x)\right)$ および $\Omega\left(f(x)\right)$ はそれぞれ，ある定数 c が存在して $cf(x)$ が上界および下界になっていることを表す.

1. n を正の整数とする．n 枚のコインが与えられ，そのうちただ 1 枚のみが偽物であり他の $n-1$ 枚より軽いとする．このとき，左右の重さの比較のみができる天秤を用いて偽物を見つけるための最善のアルゴリズムを示せ．ただしここで「最善」とは,「最悪の場合に天秤を使う回数が最も少なくなる」ことを指す.

2. k を正の整数とし，$n = 2^k$ とする．A, B を $n \times n$ 行列とし，行列積 $C = AB$ を計算することを考える．定義通りに A の第 i 行と B の第 j 列の積を計算して C の (i, j) 成分とすれば，基本演算 (体上の和と積) が $\Omega(n^3)$ 回必要であることは明らかである．ここで，各 $X \in \{A, B, C\}$ を以下の形の $n/2 \times n/2$ ブロック行列に分解する．

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

以下の補助行列を用いて C_{ij} $(i, j \in \{1, 2\})$ を表し，それらを基に C が $O(n^{\log_2 7})$ 回の基本演算で計算できることを示せ.

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\ P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\ P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\ P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\ P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \end{aligned}$$

3. n を正の整数とする．平面上に n 個の相異なる点 $\boldsymbol{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が与えられたとき，それらの凸包を求めるアルゴリズムを以下の分割統治法に従って構成し (具体的な手順を示し)，その計算量を評価せよ.

分割: x 座標の中央値で問題を分割する.

統治: 左右それぞれで分割した x 座標に最も近い点を 1 つずつ選び，その 2 点を通る直線を引く．直線が左右の凸包と交わらなくなるまで凸包に沿って上下にそれぞれ動かし，得られた 2 直線と元の凸包を合わせて凸包を作る.

4. n を正の整数とし，σ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換 (同集合上への全単射) とする．数列 $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ の部分列のうち，最長の上昇列および最長の下降列を求める n に関して多項式時間のアルゴリズムを動的計画法に基づいて構成し，その計算量を評価せよ．

5. n を正の整数とし，アイテムが n 個のナップサック問題を考える．ナップサックの容量を $C \in \mathbb{R}_{>0}$ とし，各アイテム $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ の重さを $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$，価値を $v_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ としたとき，最適解 (重さがナップサックの容量を超えない範囲で価値の総和が最大であるようなアイテムの部分集合) を求める n に関して多項式時間のアルゴリズムを動的計画法に基づいて構成し，その計算量を評価せよ．ただし，実数同士の演算も定数時間で正確に行えるとする．

6. n を 2 以上の整数とし，r_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $c_i = r_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を満たす正の整数とする．A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $r_i \times c_i$ 行列とし，行列積 $X = A_1 A_2 \cdots A_n$ を計算することを考える．一般に $m \times k$ 行列と $k \times n$ 行列の積を計算するのに必要な乗算の回数は $m \times n \times k$ であり，結果は $m \times n$ 行列になる．結果 X は行列積を計算する順序に依らないが，途中で必要になる乗算の回数は計算順序に依って変わる可能性があるので，なるべく少なくしたい．計算順序は $n-1$ 組の括弧の並べ方に 1 対 1 対応しているので，カタラン数

$$C_{n-1} \;=\; \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \;\approx\; 4^{n-1}$$

だけあるが,「最善の計算順序」を求める n に関して多項式時間のアルゴリズムを動的計画法に基づいて構成し，その計算量を評価せよ．ただしここで「最善」とは,「すべての計算順序の中で最も乗算の回数が少なくなる」ことを指す.