貪欲解法

4. 有限集合 V と，関数 $d: V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の性質を満たしているとする．

- 任意の $v \in V$ に対して $d(v,v) = 0$.
- 任意の $u, v \in V$ に対して $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$.

V の分割 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ に対して $\mu(\mathcal{U}) := \min_{i,j}\{d(u,v) \mid u \in U_i,\ v \in U_j,\ i \neq j\}$ と定める．正の整数 $k \leq |V|$ が与えられた時，V の k 個の部分集合への分割 $\mathcal{U}$ の中で $\mu(\mathcal{U})$ の値を最大にするものを求める問題を考える．この問題に対し，「d に関する最小費用全域木を求める Kruskal 法を，連結成分数が k になるまで実行し，その時点での k 個の連結成分の点集合への分割を出力する」というアルゴリズムが最適解を出力することを示せ．

5. n, r を正の整数とし，次の形の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = r \\ & x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1}$$

各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$f_i : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ が次の性質を満たすとする．

$$f_i(k-1) + f_i(k+1) \leq 2f_i(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(a) 問題 (1) の実行可能解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が最適解であることと，$\boldsymbol{x}^*$ が以下の条件を満たすことが同値であることを示せ．

条件: ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*) \leq \lambda \qquad (\text{ただし } x_i^* \geq 0 \text{ の場合}) \tag{3}$$

$$f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1) \geq \lambda \qquad (\text{ただし } x_i^* \geq 1 \text{ の場合}) \tag{4}$$

(b) 問題 (1) に対して以下の貪欲アルゴリズムが最適解を出力することを示せ．

Step 0 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$x_i \leftarrow 0$ とする．

Step 1 以下を r 回繰り返す．

$j \in \arg\max_i\{f_i(x_i + 1) - f_i(x_i)\}$ を任意に 1 つ選び，$x_j \leftarrow x_j + 1$ とする．

6. 連結な無向グラフ $G = (V, E)$ と枝費用 $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，頂点の真部分集合 $U \subset V$ が与えられているとする．このとき，U の頂点がすべて葉 (次数が 1) であるような G の全域木の中で最も費用が小さいものを求める問題を考える．この問題に対し，Kruskal 法において枝を見る順序「費用に関して昇順」を変更することにより，最適解を出力する貪欲アルゴリズムを構成し，その正当性を示せ．

ヒント: そのような全域木は $V \setminus U$ に制限しても全域木である．