

算法設計要論 レポート課題1

1/28
期末テスト

担当教員: 武田 朗子, 出題者: 山口 勇太郎

出題日: 2013年11月26日

締切日: 2013年12月10日 ~ 17:00

授業で提出
or
レポート(数理)

安定マッチング

以下の問題群から2問選んで解答せよ。ただし、1~3より1問、4~6より1問選ぶこと。問題中の記号で、 \mathbb{Z} , \mathbb{R} はそれぞれ整数全体の集合、実数全体の集合を表し、それらの下添字はその範囲に制限した部分集合を表すものとする。

1. $M = \{a, b, c, d\}$, $W = \{w, x, y, z\}$ とする。 W 上の全順序 \prec_a, \dots, \prec_d と M 上の全順序 \prec_w, \dots, \prec_z を各選好順序として与えたとき、安定マッチングは複数存在しうるが、安定マッチングの総数が最小および最大となる例をそれぞれ1つ構成せよ。ただし、最大性に関する証明は与えなくてよいものとする。
2. n を正の整数とする。 n 人の部下がおり、 n 個の仕事がある。各部下と各仕事に対し、その仕事に対するその部下の熱意および能力と呼ばれる2つの実数が定まっている。部長であるあなたは、各部下に1つずつ仕事を割り当てたい。
 - もし、部下 A は仕事 X より仕事 Y に対して熱意が高く、しかも仕事 Y に対しては部下 B よりも能力が高いにも関わらず、A に X を、B に Y を割り当てると、A は不満を抱く。
 - もし、あなたによる割り当て方とは別の割り当て方をすることで、どの仕事もそれに対する能力が高い人に割り当てられるようにできるならば、あなたは社長に怒られる。

例は付けていい。

このとき、どの部下も不満を抱かず、社長にも怒られない割り当て方が存在することを示せ。

3. M, W を要素数の等しい有限集合、 $E \subseteq M \times W$ をそのペアの集合とする。各 $m \in M$ に対して $W_m := \{w' \in W \mid (m, w') \in E\}$ 上の全順序 \prec_m が、各 $w \in W$ に対して $M_w := \{m' \in M \mid (m', w) \in E\}$ 上の全順序 \prec_w が定まっているとする。マッチング $S \subseteq E$ に対し、 $(m, w) \in E \setminus S$ が不安定対であるとは、以下の2つの条件を満たすことを言う。
 - m を含むペアが S にない、または、 $(m, w') \in S$ かつ $w \prec_m w'$ 。
 - w を含むペアが S にない、または、 $(m', w) \in S$ かつ $m \prec_w m'$ 。

この状況においても Gale-Shapley のアルゴリズムが正しく安定マッチング (不安定対が存在しないマッチング) を出力することを確かめよ。また、この場合安定マッチングは必ずしも完全マッチングとならないが、安定マッチングにおいてペアになっている要素の集合は常に同じであること (ある $M' \subseteq M$ と $W' \subseteq W$ が存在して、任意の安定マッチング $S \subseteq E$ に対して $|S| = |M'| = |W'|$ かつ $S \subseteq M' \times W'$) を示せ。

ヒント: 2つの安定マッチングを重ねた時に、次数1の点がないことを示す。