$\mathbb{Z}$ のイデアル H が,

- $\underline{H = \{0\} \text{ のとき}}$
  $H = (0)$ で 単項イデアル.

- $\underline{H \neq \{0\} \text{ のとき}}$
  $\mathbb{Z}$ が離散で、H は正の元を含むので、H には正の最初の元が存在する.
  これを h_0 とする.
  すると, $h_0 \in H$ より, $(h_0) \subset H$
  $H \neq (h_0)$ ならば, $x \in H - (h_0)$ があって, x を h_0 で割ると,
  $x = h_0 q + r(- \leq r < h_0)$ とできる.
  $x \notin (h_0)$ より $r \neq 0$
  H が加法に関して部分群だから, $x \in H - (h_0)$ なら $r \in H - (h_0)$
  h_0 の最小性に矛盾