平成 22 年度

大学院入学試験問題

数学

解答

東京大学理学部情報科学科 2009

2012 年 8 月 7 日

第 1 問

(1)

成立する。

固有ベクトルが線形独立でないと仮定すると、ある固有ベクトル x_i が、他のベクトルの部分集合のうちで線形独立なもの $\{x_j\}$ の線形和で

$$x_i = \sum_j \alpha_j x_j$$

と書くことができる。よって、

$$\begin{aligned} Ax_i &= A\sum_j \alpha_j x_j \\ \lambda_i x_i &= \sum_j \lambda_j \alpha_j x_j \\ \sum_j \lambda_i \alpha_j x_j &= \sum_j \lambda_j \alpha_j x_j \end{aligned}$$

となり、$\{x_j\}$ の線形独立性より、$\lambda_i = \lambda_j$ となって矛盾。

よって、固有ベクトルは線形独立である。

(2)

成立しない。

単位行列 I は、固有多項式が $(\lambda - 1)^m$ となって重根を持つが、対角化可能。

(3)

成立しない。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、A の固有多項式は $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ なので、2 つの実固有値を持つが、$b = (1, 0)^T$ を考えると、$u_{2k} = (1, 0)^T, u_{2k+1} = (0, 1)^T$ となり、収束しない。

(4)

成立する。

まず、固有値を 1 としても一般性を失わない。($\frac{1}{\lambda}A$ を考えればよい)

$$
\begin{aligned}
A^n &= (A - I + I)^n \\
&= \sum_k nCk(A-I)^k
\end{aligned}
$$

$A-I$ はべき零なので、$n \to \infty$ の時、右辺は有限個を除いて 0 であり、非零な最大の k を k' とする。

$$
\frac{A^n}{nCk'} = (A-I)^{k'} + \sum_{k<k'} \frac{nCk}{nCk'}(A-I)^k
$$

よって、$\frac{A^n}{nCk'}$ は $(A-I)^{k'}$ に収束するので、$u_n = \frac{A^n u_0}{|A^n u_0|}$ は収束する。

第 2 問

もし間違った記述があれば全力で指摘してください。

(1)

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

(i) は $x = \tan\theta$ とおいて置換積分すると $\int d\theta$ になる $(1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}\tan x)$。(ii) は $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x) + C$ の形。

(2)

$\int \frac{1}{z-\alpha}dz = \log(z-\alpha) + C = \log|z-\alpha| + i(arg(z-\alpha) + 2k\pi) + C$(k は整数) 。複素対数関数は多価であり、arg(z) は z の偏角の主値を表すとする。各々の経路の始点の偏角を 0 から 2π の間で定めると、経路 S_1 の終点の偏角の範囲は 2π から 4π である。$2\pi i$ の項だけは打ち消されず、和は 0 にならない。

$$I_1 = \log|1+i-\alpha| - \log|1-i-\alpha| + i(arg(1+i-\alpha) + 2\pi) - iarg(1-i-\alpha)$$

$$I_2 = \log|-1+i-\alpha| - \log|1+i-\alpha| + iarg(-1+i-\alpha) - iarg(1+i-\alpha)$$

$$I_3 = \log|-1-i-\alpha| - \log|-1+i-\alpha| + iarg(-1-i-\alpha) - iarg(-1+i-\alpha)$$

$$I_4 = \log|1-i-\alpha| - \log|-1-i-\alpha| + iarg(1-i-\alpha) - iarg(-1-i-\alpha)$$

$$\sum_{k=1}^{4} I_k = 2\pi i$$

(3)

部分分数分解すれば、(2) と同じ方法で解ける。$f(z) = 0$ の解が両方とも領域 D の内部にあることに注意する。

$$\int_S \frac{2z+0.4}{z^2+0.4+0.05}dz = \int_S \frac{1}{z-\frac{-2+i}{10}} + \frac{1}{z-\frac{-2-i}{10}}dz = 4\pi i$$

(4)

n 次の多項式 $f(z)$ が、$f(z) = k(z-a_1)(z-a_2)\dot{}(z-a_n)$ と書けるとき (複素数で考えているため必ず 1 次式で因数分解できる)、$\frac{f'(z)}{f(z)} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-a_i}$ と部分分数分解できる。分解したそれぞれの積分の値は、a_i が領域 D の内部にあるとき $2\pi i$, そうでないとき 0 であるため、和が 0 であるならば $f(z)$ は領域 D 内に解を持たない (逆もいえる) ■。

第 3 問

解答

(1)

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

(2)

$f_{Y_2}(x) = \begin{cases} x\lambda^2 e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$f_{Y_3}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\lambda^3 e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

(3)

$P(Y_n \geq 1) - P(Y_{n-1} \geq 1) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$

(4)

$P(K = k) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

解法

(1)

(i)

$F(x) = P(X \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda} \ln U \leq x) = P(U \geq e^{-\lambda x})$

U が (0,1) 上の一様分布に従うので、$P(U > 1) = 0$ に注意しつつ解を得る。

(ii)

$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

(2)

独立な確率変数の和の公式を用いる。

$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$

本問では、e の肩の t が消えるので積分はとても簡単。実質的な積分区間は $(0, x)$ であることに注意。

(3)

累積分布関数 を $F_{Y_n}(x)$ とおくと、$P(Y_n \geq 1) = 1 - F_{Y_n}(1)$ と書ける。

$G(x) = \int \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\lambda^{n-1}e^{-\lambda x}dx$ とする。
$F_{Y_n}(x) = \int \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^{n}e^{-\lambda x}dx = -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^{n-1}e^{-\lambda x} + G(x)$
$F_{Y_{n-1}}(x) = G(x)$
$P(Y_n \geq 1) - P(Y_{n-1} \geq 1) = (1 - F_{Y_n}(1)) - (1 - F_{Y_{n-1}}(1)) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}$

(4)
$P(z_n < e^{-\lambda}) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln z_n > 1) = P(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\lambda}\ln u_i > 1) = P(Y_n > 1)$
よって、$P(K = k) = P(Y_{n+1} > 1) - P(Y_n > 1)$
Y_n の分布が連続的である (つまり $P(Y_n = 1) = 0$ である) とき 、$P(Y_n > 1) = P(Y_n \geq 1)$ に注意する。
確率変数 K はポアソン分布に従う (K を初めて条件を満たす n そのものではなく n-1 で定義しているのはそのため)。