平成 21 年度

大学院入学試験問題

# 数学

解答

is2009

2012 年 8 月 7 日

## 第 1 問

### (1)

$|\lambda I - A|$=0 を解けばよい。

$$\lambda = a^2 + 1, 1, 0$$

### (2)

$(\lambda I - A)x = 0$ を解けばよい。

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a^2+1} \\ \frac{a}{a^2+1} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{a^2+1} \\ \frac{-1}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

### (3)

やるだけ

$$u = cp + bq + acr, x_0 = adp - dr$$

### (4)

$$\begin{aligned} x_n &= A(\alpha_{n-1}p + \beta_{n-1}q + \gamma_{n-1}r) + cp + bq + acr \\ &= (a^2+1)\alpha_{n-1}p + \beta_{n-1}q + cp + bq + acr \end{aligned}$$

よって、

$$\alpha_n = (a^2+1)\alpha_{n-1} + c, \beta_n = \beta_{n-1} + b, \gamma_n = ac$$

### (5)

漸化式を解くと、

$$\alpha_n = (a^2+1)^n(ad + \frac{c}{a^2}) - \frac{c}{a^2}, \beta_n = nb, \gamma_n = ac(n > 0), \gamma_0 = -d$$

よって、$n > 0$ に関して、

$$x_n = ((a^2+1)^n(ad + \frac{c}{a^2}) - \frac{c}{a^2})p + nbq + acr$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{|x_n|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

となればよい。まず、$b>0$ でないと、$\beta_n>0$ とならないので、$b>0$ であることが必要。さらに、$ad+\frac{c}{a^2}\neq 0$ の時、$\frac{\alpha_n}{\beta_n}\to\infty$ なので、$ad+\frac{c}{a^2}=0$ であることも必要。逆にこの時、$\alpha$ と $\gamma$ は定数で、$\beta_n\to\infty$ なので十分。よって必要十分条件は、$b>0, ad+\frac{c}{a^2}=0$

## 第 2 問

途中式はかなり省略してますが、注記した箇所以外は機械的に計算するだけです。
もし間違った記述があれば全力で指摘してください。
(4),(5) をすっきりと解答できるやり方があったらぜひ教えてください。

### (1)

(*) $x(t) = x_0 e^{-t}$ , (**) $x(t) = 1 - (1 - x_0)e^{-t}$
1 階線形微分方程式の公式を用いる。
$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解は $y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)e^{-\int P(x)dx}$

### (2)

$\theta_0 = x_0 e^{-t_1}$ を解いて、$t_1 = \log \frac{x_0}{\theta_0}$

### (3)

$\theta_1$ でスイッチが切れてから $\theta_0$ でスイッチが入るまでの時間を $\tau_{off}$ , 同様に入ってから切れるまでの時間を $\tau_{on}$ とする。
$\theta_0 = \theta_1 e^{-\tau_{off}}$ , $\theta_1 = 1 - (1 - \theta_0)e^{-\tau_{on}}$ を解いて、$\tau_{off} = \log \frac{\theta_1}{\theta_0}, \tau_{on} = \log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}$
$\tau = \tau_{off} + \tau_{on} = \log \frac{\theta_1}{\theta_0} + \log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}$

### (4)

$\bar{x}\tau = \int_0^{\tau_{off}} \theta_1 e^{-t}dt + \int_0^{tau_{on}} 1 - (1 - \theta_0)e^{-t}dt = \log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{1-x}dx$
$\bar{\theta}\tau = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \bar{\theta}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})dx$
$(\bar{x} - \bar{\theta})\tau = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{1-x} - \bar{\theta}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})dx$
$(\bar{x} - \bar{\theta})\tau$ を $\theta_0, \theta_1$ を用いた式で表すのは簡単だが、それを $\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(x)dx$ の形にするのが容易ではない。$\log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}$ は $\frac{1}{1-x}$ を定積分した形であると気づくかどうか。

### (5)

$w$ が $\Delta x$ 増大すると $\theta_0$,$\theta_1$ は $\frac{\Delta x}{2}$ だけ減少, 増加するので 、$f(\theta_0, \bar{\theta}) + f(\theta_1, \bar{\theta}) < 0$ を示せばよい。
$f(\theta_0, \bar{\theta}) + f(\theta_1, \bar{\theta}) = \frac{2(1-\bar{\theta})^2}{(1-\theta_0)(1-\theta_1)} - \frac{2(\bar{\theta})^2}{\theta_0\theta_1}$
$\theta_1 - \bar{\theta} = \bar{\theta} - \theta_0, \bar{\theta} < 1 - \bar{\theta}$ に注意して上式の左項と右項を比較すると、負であることがわかる ($\bar{\theta} - \theta_0 = d$ とおいて $\theta_0, \theta_1$ を消去し、それぞれの逆数を取ってみるとよい)。■

## 第 3 問 解答

(1)

$$P_n(k) = \frac{P_n(k-1) + P_n(k+1)}{2}$$

(2)

$$P_3(2) = \frac{2}{3}$$

(3)

$$P_n(k) = \frac{k}{n}$$

(4)

$$k \leq \frac{n}{2}$$

のとき

$$T_n(k) = kn - k^2$$

$$k > \frac{n}{2} \text{のとき } T_n(k) = (n-k)n - (n-k)^2$$

(5)

$$\frac{3}{19}$$

(6)

$$\frac{132}{19}$$

## 第 3 問 解法

### (1)-(3)

$$P_n(k+1) - P_n(k)$$

は n を固定すると定数なので、

$$P_n(k)$$

は 0 から 1 までの等差数列となる。

### (4)

漸化式

$$T_n(k) = \frac{T_n(k-1) + T_n(k+1)}{2} + 1$$

を解く。普通に解くと面倒だけど、

$$T'_n(k) = T_n(k) + k^2$$

とおいて定数を除去して適当につじつまを合わせると答えは簡単に出る。

### (5)

Q(x,y) を (x,y) からはじめて (4,0) で終了する確率とおき、以下の式を解く (代入するだけ)

$$Q(1,0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}Q(0,0)$$

$$Q(0,1) = \frac{2}{3}Q(0,0)$$

$$Q(-1,0) = \frac{1}{2}Q(0,0)$$

$$Q(0,-1) = \frac{1}{2}Q(0,0)$$

$$P(4,0) = Q(0,0) = \frac{1}{4}(Q(1,0) + Q(0,1) + Q(-1,0) + Q(0,-1))$$

### (6)

S(x,y) を (x,y) からはじめて終了までの平均移動回数とおき、以下の式を解く (代入するだけ)

$$S(1,0) = 3 + \frac{3}{4}S(0,0)$$

$$S(0,1) = 2 + \frac{2}{3}S(0,0)$$

$$S(-1,0) = 1 + \frac{1}{2}S(0,0)$$

$$S(0,-1) = 1 + \frac{1}{2}S(0,0)$$

$$T = S(0,0) = 1 + \frac{1}{4}(S(1,0) + S(0,1) + S(-1,0) + S(0,-1))$$