平成 21 年度

大学院入学試験問題

数学

解答

is2009

2012 年 8 月 7 日

第 1 問 解答案

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{3n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A^{3n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$(x-1)^2(x^2+x+1)$$

(4)

$$(x-1)^2(x^2+x+1)$$

(5)

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 0 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

第 1 問 解法

(1)

略

(2)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と予想。帰納法により証明。

I[n=0]

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II[n=k]

$n = k$ で成り立つと仮定。

$$\begin{aligned} A^{3(k+1)} &= A^{3k}A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって証明された。

$$A^{3n+1} = AA^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{3n+2} = AA^{3n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\det(xE-A)=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$
$$=(x-1)\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$
$$=(x-1)(x^3-1)$$
$$=(x-1)^2(x^2+x+1)$$

(4)

最小多項式 $m(x)$ は A の固有値 λ に関して

$$m(\lambda)=0$$

が成り立つ $(\because m(\lambda)v=m(A)v=0\cdot v=0 \Rightarrow m(\lambda)=0)$
よって $m(x)$ は $(x-1)^2(x^2+x+1)$ または $(x-1)(x^2+x+1)$

$$(A-1)(A^2+A+E)\neq 0$$

より

$$m(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)$$

(5)

最小多項式の次数はジョルダン細胞の中の最大次数なので

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda=1$ に対応する固有ベクトルは

$$u=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(A-I)v=u$ となるベクトル v は

$$v=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ω に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$$

ω^2 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

よって

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 0 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

第 2 問 解答案

(1)

$\frac{5^{n-1}}{6^n}$

(2)

6

(3)

30

(4)

E(X) = 12 , V(X) = 60

(5)

ちょうど $n(>1)$ 回で終わる確率は $(n-1)\frac{5^{n-2}}{6^n}$ 和と 2 乗和を求めて、上問との一致を確かめればよい (計算は省略)。

第 2 問 解法

(1)

略

(2)

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{5}{6})^k = 6$$

(3)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\frac{5}{6})^k = 66$$

k^2 が含まれてると面倒なので (計算する公式あった気がするけど忘れた)、k^2 を 1+3+5+⋯と分解して、$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)(\frac{5}{6})^k$ と書き換えるのがよさそう。

(4)

期待値と分散の線形性を利用する。

(5)

ちょっと面倒だけど、計算するだけ。

第 3 問

(1)

多項式を積分するだけの面倒な計算問題。計算の正しさに自信はないので間違ってたら指摘してほしい。
$Z = 1 - \sqrt{\frac{h}{c}}$ とおく。$y = b(Z - \sqrt{\frac{x}{a}})^2$ と変形できるので、x について区間 $[0, aZ^2]$ で積分する。

$$S(h) = \int_0^{aZ^2} b(Z - \sqrt{\frac{x}{a}})^2 dx = b[\frac{x^2}{2a} - \frac{4Zx^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a}} + Z^2 x]_0^{aZ^2} = \frac{abZ^4}{6} = \frac{ab}{6}(1 - \sqrt{\frac{h}{c}})^4$$

$S(h)$ を区間 $[0, c]$ で積分する。

$$V = \int_0^c \frac{ab}{6}(1 - \sqrt{\frac{z}{c}})^4 dz = \frac{ab}{6}[\frac{z^3}{3c^2} - \frac{8z^{\frac{5}{2}}}{5c^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^2}{c} - \frac{8z^{\frac{3}{2}}}{3c^{\frac{1}{2}}} + z]_0^c = \frac{abc}{90}$$

(2)

平面 P の方程式は、$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ である。
曲面 $F(x, y, z) = 0$ の (X, Y, Z) における接平面の方程式は $\frac{\partial}{\partial x}F(x, y, z)(x - X) + \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, z)(y, Y) + \frac{\partial}{\partial z}F(x, y, z)(z - Z) = 0$ である。
曲面 Q の (X, Y, Z) における接平面 $\frac{1}{\sqrt{2aX}}(x - X) + \frac{1}{\sqrt{2bY}}(y - Y) + \frac{1}{\sqrt{2cZ}}(z - Z) = 0$ は P と平行なので、係数を比較することで、$(X, Y, Z) = t(a, b, c)$(t は定数) となる。(X, Y, Z) が Q 上にあることから $t = \frac{1}{9}$ であり、接点と接平面は以下となる。

$$(X, Y, Z) = \frac{1}{9}(a, b, c)$$

$$\frac{3}{a\sqrt{2}}(x - \frac{a}{9}) + \frac{3}{b\sqrt{2}}(y - \frac{b}{9}) + \frac{3}{c\sqrt{2}}(z - \frac{c}{9}) = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{3}$$